# الحلقات، الحلقيات والجبر الخطي

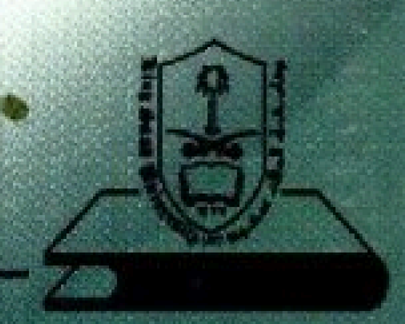
تأليف

ب. هارتلي    ت. هاوكس

ترجمة

الدكتور يوسف بن عبد الله الخميس

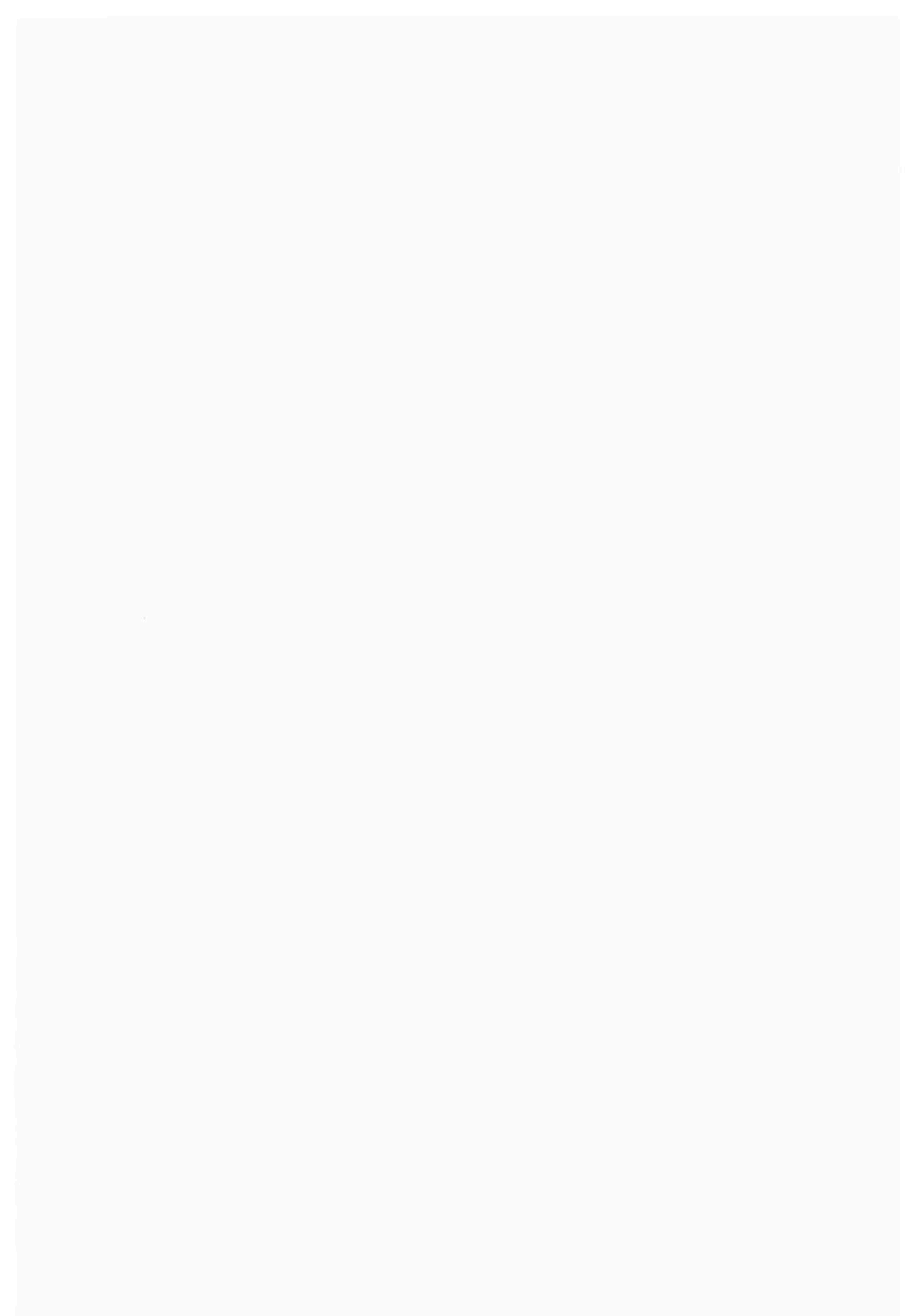
الدكتور أحمد حميد شراري



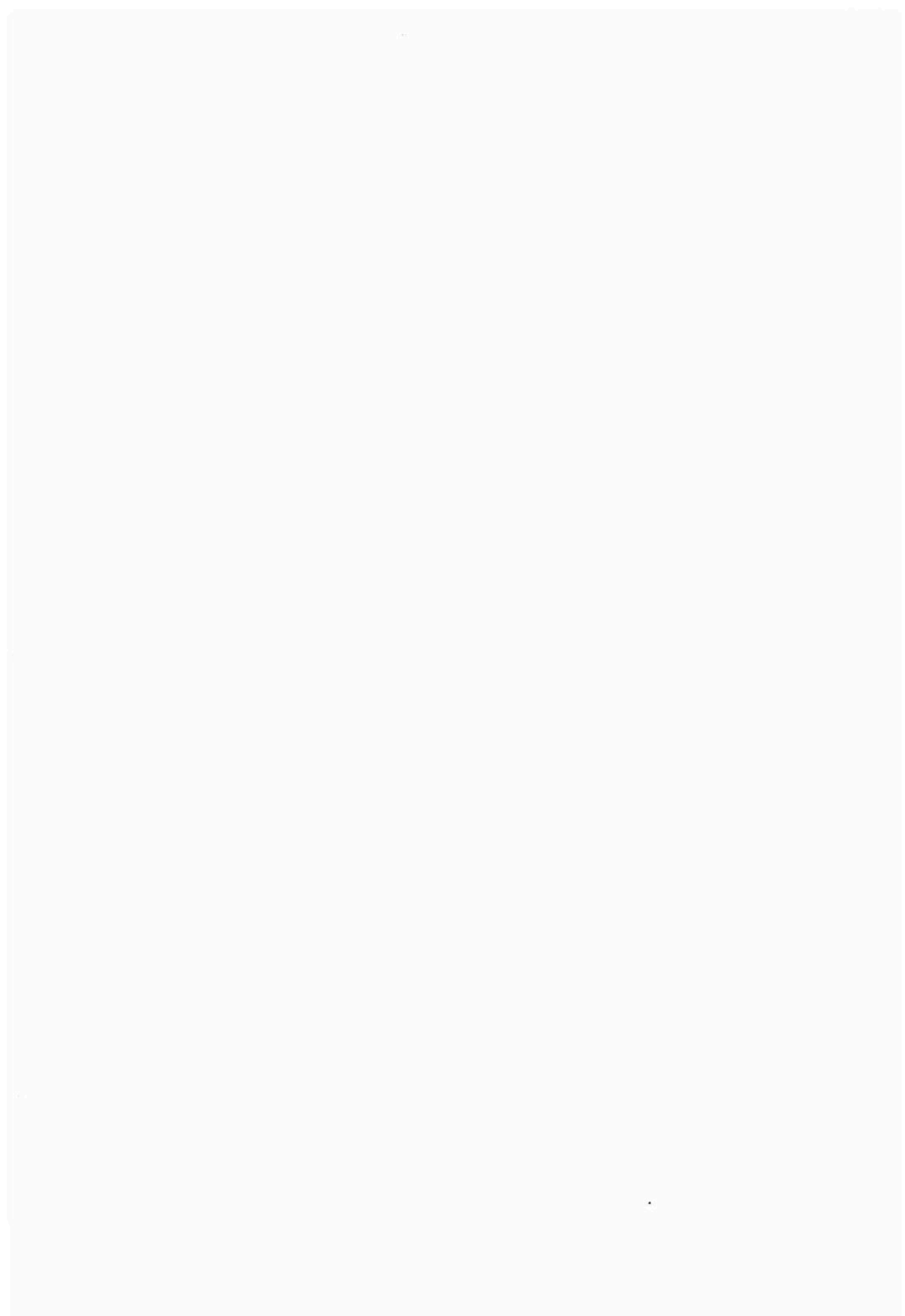
جامعة الملك سعود



النشر العلمي و المطابع







# الحلقات، الحلقيات والجبر الخطي

## كتاب في الجبر يصف بنية الزمر الإبدالية والأشكال القانونية للمصفوفات من خلال دراسة الحلقات والحلقيات


تأليف

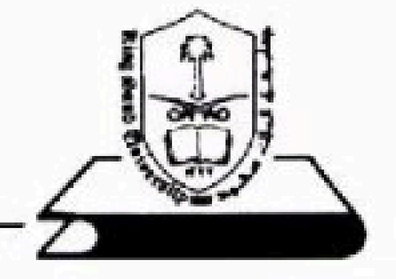
ب. هارتلي
جامعة مانشستر

ت. هاوكس
جامعة وارِك

ترجمة

يوسف عبدالله الخميس
أحمد حميد شراري

قسم الرياضيات، كلية العلوم
جامعة الملك سعود


النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

هذه ترجمة عربية مصرح بها لكتاب :

***Rings, Modules and Linear Algebra***

***By***: B. Hartley and T.O. Hawkes

***Published by***: Chapman & Hall, The University Press, Cambridge, First Edition, 1970

*فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر*

هارتلي، ب؛ هاوكس، ت.

الحلقات، الحلقيات والجبر الخطي/ ترجمة: يوسف عبدالله الخميس، أحمد حميد شراري. - الرياض.

٦٠٠ ص ؛ ١٧سم × ٢٤ سم

ردمك ٨-٧١٧-٠٥-٩٩٦٠

١- الحلقات، الحلقيات والجبر الخطي ٢- الحلقات

أ- يوسف عبدالله الخميس (مترجم) ب- أحمد حميد شراري (مترجم) جـ- العنوان

ديوي ٦٢٩,٠٤ ١٩/٠٢١٨

رقم الإيداع : ١٩/٠٢١٨

حَكّمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق على نشره بعد اطلاعه على تقارير المحكمين في اجتماعه الثالث والعشرين للعام الدراسي ١٤١٥/١٤١٦هـ المعقود في ١٣/١/١٤١٦هـ الموافق ١١/٦/١٩٩٥م.



النشر العلمي والمطابع ١٤٢٠هـ/١٩٩٩م

# مقدمة المترجمين

لعل من أسس العمل الأكاديمي الرجوع إلى المصادر الرئيسة في الاختصاصات المختلفة والترجمة أحد مصادر الاتصال الحضاري بين الأمم وتداخل حضاراتها.

لا شك أن الأساتذة الزملاء والدارسين، يستشعرون النقص الذي تعانيه المكتبة العربية في حقول الرياضيات المختلفة؛ سواءً من الكتب المؤلفة أو المترجمة. ونرجو أن يكون في تجربتنا المتواضعة هذه بعض ما يفيد في إثراء المكتبة العربية في حقل الرياضيات.

لعل قيامنا بتدريس الجبر الخطي ونظريتي الزمر والحلقات، قد ولّد لدينا الرغبة بضرورة أن يتوافر للدارس العربي، ما يمكن أن يعينه في فهم هذه الموضوعات الجوهرية في الرياضيات. كما كان اتصالنا بمادة الكتاب من خلال تدريسنا، حافزًا لتقديمه إلى قرّاء العربية. كما يجد القارئ في مقدمة المؤلفين الأسباب الأخرى التي دعتنا لترجمة هذا الكتاب.

أيها القارئ الكريم، إن إحدى المصاعب في الترجمة إلى اللغة العربية هي اختلاف المصطلحات من بلد عربي إلى آخر، وللتوحيد - قدر الإمكان في هذا المجال - كان مرجعنا ما اتفق عليه مكتب تنسيق التعريب في الرباط التابع للمنظمة العربية للثقافة والتربية والعلوم، ومعجم الرياضيات الذي أصدرته، مشكورة، مؤسسة الكويت للتقدم العلمي.

وأخيرًا يسرنا أن نوجه الشكر لمركز الترجمة في جامعة الملك سعود على تبنيه قضية تعريب التعليم الجامعي، وموافقته على نشر الكتاب كما نخص بالشكر والعرفان جامعة الملك سعود على تشجيعها وتبنيها نشر هذا الكتاب راجين من الله العلي القدير أن ينفع بهذا المطبوع ويحسن القصد والعاقبة وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

وفي الختام نستميح القارئ عذرًا، إذا صادف بعض الهفوات والأخطاء الطباعية التي لا تخفى عليه.

# مقدمة المؤلفين

اعتمد هذا الكتاب على مجموعة محاضرات أعطيت لطلبة البكالوريوس في الرياضيات في بداية المستوى الثاني في جامعة وارك (Warwick) في بريطانيا. لقد أكمل الطالب عند هذه المرحلة مقررًا في أسس الرياَضيات، قُدِّم فيه الترميز الحديث وبعض البنى الأساسية التي أصبحت الآن مألوفة لمعظم الطلاب عند انتهاء حياتهم المدرسية، ومقررًا في الجبر الخطي. لذلك نفترض أن للطالب خلفية جيدة عن لغة المجموعات، العمليات، التطبيقات وكذلك معرفة لا بأس بها بالفضاءات المتجهة، التحويلات الخطية والمصفوفات.

لقد حاولنا خدمة جمهور واسع من طلاب الرياضيات في المرحلة الجامعية من خلال إعداد كتاب مقروء، ممتع، ويعطي في الوقت نفسه وصفًا دقيقًا عن كيفية تقديم فكرة جبرية أساسية معينة وتطويرها واستخدامها في حل بعض المسائل الجبرية الملموسة ومن بينها ما يلي:

(أ) كيف يتم تصنيف الزمر الإبدالية المولدة نهائيًا؟

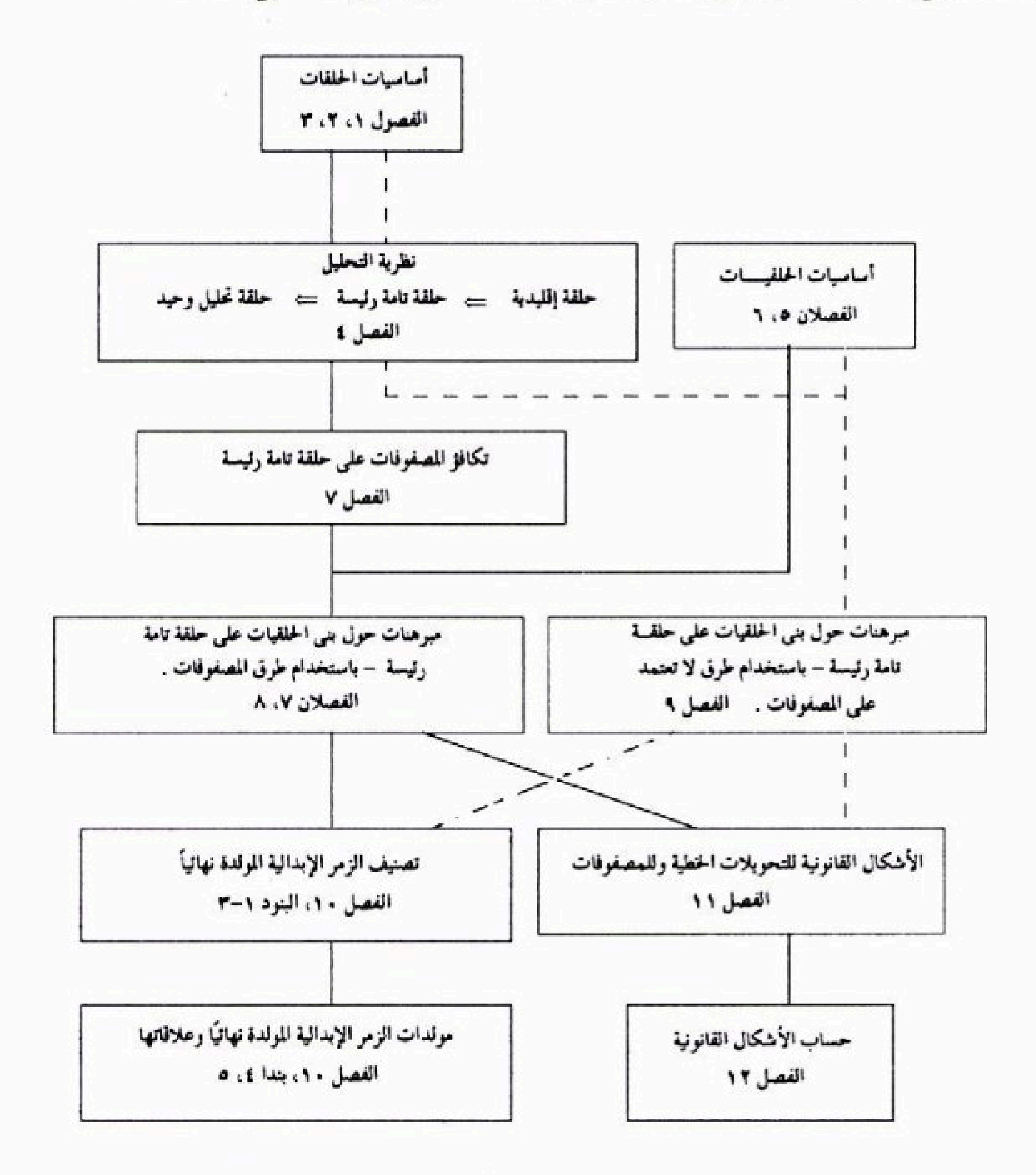
(ب) كيف نختار أساسًا لفضاء متجه مولَّد نهائيًا بحيث تكون مصفوفة تحويل خطي معين من الفضاء المتجه إلى نفسه، بالنسبة إلى الأساس المختار، ذات شكل مناسب يمكن التعامل معه بسهولة؟

إن مفهوم الحلقية على حلقة، أساسي وهو فكرة لها أهمية مركزية في الجبر الحديث، وتجمع تحت نفس السقف كثيرًا من الأفكار المألوفة التي تبدو عند النظرة الأولى وكأنها غير مرتبطة. عندما نختار نوع الحلقة المستخدمة، ونضع بعض القيود عليها، يمكن تطوير بنية كاملة لحلقيات مأخوذة على هذه الحلقة. سندعم النظرية العامة ببعض الحالات الخاصة التي يمكن التوسع في دراستها حتى تستخدم في التطبيقات.

شمل الكتاب ثلاثة أجزاء. يختص الجزء الأول بتعريف المفاهيم والمصطلحات وتجميع الأفكار الأساسية، وتطوير نظرية التحليل إلى عوامل في حلقة تامة رئيسة سنحتاج إليها لاحقا. ويتعامل الجزء الثاني مع مبرهنات التفريق الأساسية التي تصف بنية الحلقيات المولدة نهائيًا على حلقة تامة رئيسة. ويغطي الجزء الثالث – ويمكن اعتباره أهم الأجزاء – تطبيقات لهذه المبرهنات. أحد هذه التطبيقات هو تصنيف، تحت سقف تغيير الأساس، التحويلات الخطية من فضاء متجه إلى نفسه. ويتضح أن هذه المسألة مكافئة لإيجاد الأشكال القانونية للمصفوفات تحت تأثير التشابه، وبصفة خاصة شكل جوردان القانوني. هذه مسألة ذات أهمية كبيرة، وبالإضافة إلى ذلك، فهي تستخدم بشكل متكرر في كثير من الموضوعات الرياضية من المعادلات التفاضلية إلى الهندسة الإسقاطية. تزودنا لغة نظرية الحلقيات بمفهوم بسيط ورائع لشكل جوردان القانوني، وتزداد أهمية هذه اللغة في الرياضيات؛ لذلك يجب تقديمها في مرحلة مبكرة خاصة أنها تمثل في صيغتها البدائية نظرية الفضاءات المتجهة على حلقة عامة بدلا من حقل، ولذلك فإن مكانها الطبيعي يكون في «مقرر ثان في الجبر الخطي». إن الجزئين الثاني والثالث يؤديان دورين مكملين لبعضهما؛ حيثً تظهر النظرية العامة وحدة المفاهيم في الجزء الثاني، وبساطة التطبيقات في الجزء الثالث، كما نلاحظ في الوقت نفسه أن التطبيقات في الجزء الثالث تزودنا بمبرر قوي للنظرية العامة وأساس راسخ وملموس لها. للحصول على معلومات إضافية عن تنظيم الكتاب يمكن للقارئ أن يرجع إلى مخطط انسياب الكتاب.

# تنظيم الموضوعات

يرمز المسار المستمر إلى الطريق الرئيسي خلال الكتاب. ويرمز المسار المنقط إلى طريق بديل لا يستمر إلى الموضوعين المذكورين أسفل المخطط.



**ملاحظات للقارئ**

١ - رُقِّمت التعاريف، والمأخوذات، والمبرهنات، . . . الخ، تعاقبيًا بأرقام من الشكل (م - ن) حيث يرمز م لرقم الفصل وَ ن للموضع ضمن الفصل.

٢ - رقمت المعادلات التي تدعو الحاجة للرجوع إليها برقم (ن) على الجهة اليمنى للصفحة، ويبدأ الترقيم بالفصل.

٣ - ذُيِّل كل فصل بتمارين، وتدل علامة النجمة على التمارين الأصعب.

# المحتويات

صفحة

**الفصل الرابع: التحليل في الحلقات التامة** **صفحة**



**الفصل الخامس: الحلقيـــات**



**الفصل السادس: بعض أنواع الحلقيات الخاصة**



**الجزء الثاني: التفريق المباشر لحلقية مولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة**

**الفصل السابع: الحلقيات الجزئية من الحلقيات الحُرّة**

صفحة

**الفصل الثامن: مبرهنات التفريق**



**الفصل التاسع: مبرهنات التفريق (مقاربة لا تعتمد على المصفوفات)**



**الجزء الثالث : تطبيقات على الزمر والمصفوفات**

**الفصل العاشر: الزمر الإبدالية المولدة نهائيا**



**الفصل الحادي عشر: التحويلات الخطية، المصفوفات والأشكال القانونية**



**الفصل الثاني عشر: حساب الأشكال القانونية**

صفحة

# الجزء الأول

## الحلقات والحلقيات

- الحلقات – تعاريف وأمثلة
- الحلقات الجزئية، التشاكلات والمثاليات
- بناء حلقات جديدة
- التحليل في الحلقات التامة

# الفصل الأول

## الحلقات - تعاريف وأمثلة

### ١ - تعريف الحلقة

تعتبر الحلقة موضوعا طبيعيا للدراسة؛ لأنها تدخل في كثير من التخصصات الرياضية المهمة والمتنوعة وسيتضح ذلك من الأمثلة التي سنقدمها.

تعتبر مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ نموذجا تعرّف على أساسه الحلقة، لذلك نجد أن الشروط التي تدخل في تعريف الحلقة مستنبطة من بعض الصفات المهمة لمجموعة الأعداد الصحيحة التي ستظهر بشكل متكرر كمصدر للإلهام والأمثلة عن الحلقات. الحلقة $R$، مثل الأعداد الصحيحة، مجموعة مع عمليتين ثنائيتين، تسميان عادة الجمع (addition) (ويرمز له بالرمز +) والضرب (multiplication) (ويرمز له بأن تكتب العناصر جنب بعضها). تشكل $R$ حلقة إذا كانت زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الجمع، وشبه زمرة بالنسبة لعملية الضرب. وتحقق العمليتان قوانين التوزيع التي تربط بينهما.

لنكن أكثر دقة. نتذكر أولا أن العملية الثنائية على مجموعة $S$ هي تطبيق $\mu$ $S \times S \to S$ : حيث تمثل $S \times S$ الجداء الديكارتي لـ $S$ في نفسها؛ أي أن $S \times S$ هي مجموعة كل الأزواج المرتبة $(a, b)$ حيث $a, b \in S$. سنكتب عادة صورة الزوج المرتب $(a, b)$ تحت تأثير $\mu$ بالشكل $a * b$ حيث $*$ الرمز المناسب للعملية الثنائية. يلاحظ أن الترتيب مهم؛ حيث إنه قد يكون $a * b$ و $b * a$ عنصرين مختلفين في $S$. وفي حالة كون $a * b = b * a$ لكل $a, b \in S$ فإن العملية $*$ تسمى إبدالية (commutative). بنفس الروح يسمى غالبا أي تطبيق من $S$ إلى نفسها عملية أحادية (unary operation).

**(١-١) تعاريف**

( ا ) **شبه الزمرة (semigroup)**. هي مجموعة غير خالية $S$ مع عملية ثنائية $*$ تحقق خاصة التجميع، أي أن :

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

لكل $a, b, c \in S$.

(ب) **الزمرة (group)**. هي مجموعة غير خالية $G$ مع عملية ثنائية $*$ وأخرى أحادية $x \to \overline{x}$ وتحتوي المجموعة $G$ على عنصر مختار $e$ بحيث :

(i) تشكل $G$ شبه زمرة بالنسبة إلى $*$

(ii) $a * e = e * a = a$ لكل $a \in G$

(iii) $a * \overline{a} = \overline{a} * a = e$ لكل $a \in G$

يسمى العنصر $e$ **العنصر المحايد (identity element)** أو **(neutral element)** **للزمرة $G$**، ويسمى $\overline{a}$ **معكوس $a$** (*inverse*). يعتبر استخدام رمز الضرب أو رمز الجمع للزمر ممارسة ثابتة، وعندئذ يستخدم $a^{-1}$ بدلا من $\overline{a}$، ويكتب عادة 1 بدلا من $e$ في حالة استخدام رمز الضرب، بينما يستخدم $-a$ بدلا من $\overline{a}$ ويكتب 0 بدلا من $e$ في حالة استخدام رمز الجمع. ويستخدم عادة (وليس دائما) رمز الجمع في حالة كون العملية الثنائية المعرّفة على الزمرة إبدالية. وتسمى الزمر الإبدالية عادة بالزمر «الآبيلية» تشريفا للرياضي النرويجي المتميز ن. آبل (N.H. Abel) (١٨٠٢-١٨٢٩م) الذي درس صنفا من المعادلات الجبرية التي لها علاقة بالزمر الإبدالية. نتذكر من المعلومات الأولية عن الزمر أن العنصر المحايد وحيد وكذلك المعكوس.

(جـ) **الحلقة (ring)**. هي مجموعة غير خالية $R$ مع عمليتين ثنائيتين مربوطتين بقوانين التوزيع؛ بحيث تشكل $R$ زمرة إبدالية بالنسبة للعملية الثنائية الأولى (كاصطلاح تسمى الجمع، ويرمز لها بالرمز +) كما تشكل $R$ شبه زمرة بالنسبة للعملية الثنائية الأخرى (تسمى الضرب، ويرمز لها بأن تكتب العناصر جوار بعضها).

تربط قوانين التوزيع من اليسار ومن اليمين هاتين العمليتين كما يلي :

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

*لكل $a, b, c \in R$ . قد يجد القارئ أنه من الأنسب هنا أن يكتب شروط الحلقة بالتفصيل .*

من الواضح أن الأعداد الصحيحة (التي سبق أن رمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$) مع عمليتي الجمع العادي والضرب العادي تحقق شروط الحلقة . يلاحظ - لحسن الحظ - أن شروط الحلقة لا تُميِّز $\mathbb{Z}$؛ حيث لو حدث ذلك لوصلنا إلى طريق مسدود في «نظرية الحلقات» ، وهذا لا يقلل من أهمية دراسة الأعداد الصحيحة ، ولكن يؤكد فقط أن الحلقة مفهوم له مجالات واسعة وأنها تتجلى في مظاهر كثيرة ، وتتضمن حالات مختلفة . لكي نوضح أن حلقة الأعداد الصحيحة حالة خاصة من بين الحلقات ، نشير إلى أن ضربها إبدالي ، وأنها مرتبة وقابلة للعد ، ولها محايد ضربي ولها تحليل ذو ميزات جيدة ، ولم نشر إلى كل هذه الخواص في تعريف الحلقة . ستوضح الأمثلة التالية أن تعريف الحلقة كان باعثا على تكوين تشكيلة متنوعة من البنى الجبرية .

## ٢- بعض الأمثلة على الحلقات

لكي نفهم نظرية رياضية عامة ، من المهم أن نجرّبها على بعض الأمثلة الملموسة ، وإن أمكن المألوفة ، حيث لا تتضح أهمية النظرية على الأغلب إلا بعد معرفة تطبيقاتها على بعض الحالات الخاصة أو الأمثلة البسيطة . وهذا يبين قيمة وجود أمثلة متنوعة عن البنية الجبرية التي نقوم بدراستها . ما المقومات الأخرى لفهم برهان ما ؟ يلاحظ أن منطوق المبرهنة يحتوي على مجموعة من المعطيات يتبعها بعض النتائج ، وأحد الأنشطة الفعالة للطالب هو أن يخوض في تفاصيل البرهان ، ويعين بدقة أين استخدمت كل فرضية ، ثم يسأل هل تبقى المبرهنة صحيحة تحت شروط أقل ؟ وقد يتطلب ذلك منه إعطاء أمثلة مناقضة لإثبات أن المبرهنة لن تبق صحيحة تحت فرضيات أضعف . وهكذا فإن وجود قائمة من الأمثلة الذهنية مفيد مرة أخرى . لذلك نؤكد أهمية الأمثلة في هذا الكتاب . سنبدأ بإعطاء قائمة قصيرة من أمثلة الحلقات التي سنرجع إليها بشكل متكرر . سنتعلم في البابين القادمين طرقا عامة في بناء حلقات جديدة من حلقات معطاة .

**مثال حلقة (١)**

إذا كان $n \in \mathbb{Z}$، فإن المجموعة الجزئية

$$n\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ يقسم } n\}$$

من مجموعة الأعداد الصحيحة، مغلقة تحت تأثير الجمع و الضرب. من الواضح أنها تحقق شروط الحلقة، وبالتالي فهي نفسها حلقة.

**مثال حلقة (٢)**

نفرض أن $n$ عدد صحيح موجب ثابت ولنعرف على $\mathbb{Z}$ علاقة التكافؤ ~ كما يلي:

$a \sim b$ إذا، وفقط إذا كان $a - b$ يقبل القسمة على $n$.

يرمز لفصل التكافؤ الذي يحوي $a$ بـ $[a]$. يمكن إثبات أن $[0], [1], ..., [n-1]$ هي كل فصول تكافؤ العلاقة ~. أي أنه لا يوجد تكافؤ بين عنصرين مختلفين من المجموعة $\{0, 1, ..., n-1\}$ وكل عدد صحيح يكافئ أحد عناصر هذه المجموعة. تسمى فصول التكافؤ المذكورة آنفا بفصول التطابق قياس $n$ (congruence classes modulo $n$) أو فصول الرواسب قياس $n$ (residue classes modulo $n$)، ويرمز لمجموعة فصول التطابق قياس n بالرمز $\mathbb{Z}_n$. سيتضح أنه لو عرّفنا جمع فصول التطابق وضربها اعتمادا على مُمثّلاتها (أي أن $[a] + [b] = [a + b]$ و $[a][b] = [ab]$)، فإن هاتين العمليتين تكونان معرفتين جيدا وتحولان المجموعة $\mathbb{Z}_n$ إلى حلقة، وهذه الحلقة بها عدد منته من العناصر هو $n$. سنثبت ذلك بالتفصيل في الفصل الثاني في الجزء الخاص بحلقات القسمة. قد يرغب القارئ في التعرف أكثر على هذه الحلقات بكتابة جدولي جمع وضرب عناصر $\mathbb{Z}_6$ مثلا، ويقنع نفسه بتحقيقها شروط الحلقة. نلاحظ مثلا في $\mathbb{Z}_6$ أن $[2] = ([8] =) [5] + [3]$ وأن $[3] = ([15] =) [5] [3]$.

**مثال حلقة (٣)**

نستطيع أن نجعل أي زمرة إبدالية $A$ حلقة بتعريف $ab = 0$ لكل $a, b \in A$. سنترك التأكد من كون $A$ تحقق شروط الحلقة كتمرين.

**مثال حلقة (٤)**

مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ تشكل حلقة بالنسبة إلى عمليتي الجمع العادي والضرب العادي. وفي الحقيقة إنها حلقة إبدالية (الضرب إبدالي)، بل وأكثر من ذلك يوجد لها محايد ضربي، كما يمكن القسمة على عناصر غير صفرية. يمكن التحقق بسهولة من كون المجموعتين الجزئيتين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ من $\mathbb{C}$ واللتين ترمزان على الترتيب إلى الأعداد الحقيقية والأعداد النسبية، تشكلان حلقتين تحت تأثير عمليتي الجمع العادي والضرب العادي.

**مثال حلقة (٥)**

لنعتبر المجموعة الجزئية التالية من $\mathbb{C}$ :

$$J = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

يمكن بسهولة إثبات أن عمليات الجمع والضرب والطرح العادية عمليات مغلقة في $J$ ويتبع ذلك مباشرة أن J تحقق شروط الحلقة. تسمى J حلقة أعداد جاوس (ring of Gaussian integers).

**مثال حلقة (٦)**

لمجموعة معطاة $X$، نفرض أن $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X (مشتملة على $X$ نفسها وعلى المجموعة الخالية $\phi$). تسمى $P(X)$ مجموعة القوة (power set) للمجموعة $X$. إذا كانت $X$ منتهية ولها $n$ من العناصر، فإن $P(X)$ لها $2^n$ من العناصر، لأنه عند تكوين مجموعة جزئية من $X$ فإن أي عنصر من $X$ يعطي إمكانيتين على حسب وجود العنصر في المجموعة الجزئية أو وجوده خارجها. وعليه فإن العدد الكلي للمجموعات الجزئية هو $2^n$. من المدهش نوعا ما أنه يمكن دائما أن تعطى بنية الحلقة لمجموعة القوة بالطريقة التالية. لكل $A, B \in P(X)$، نعرف:

$$A + B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) \qquad \text{«اتحاد منفصل»}$$

$$AB = A \cap B$$

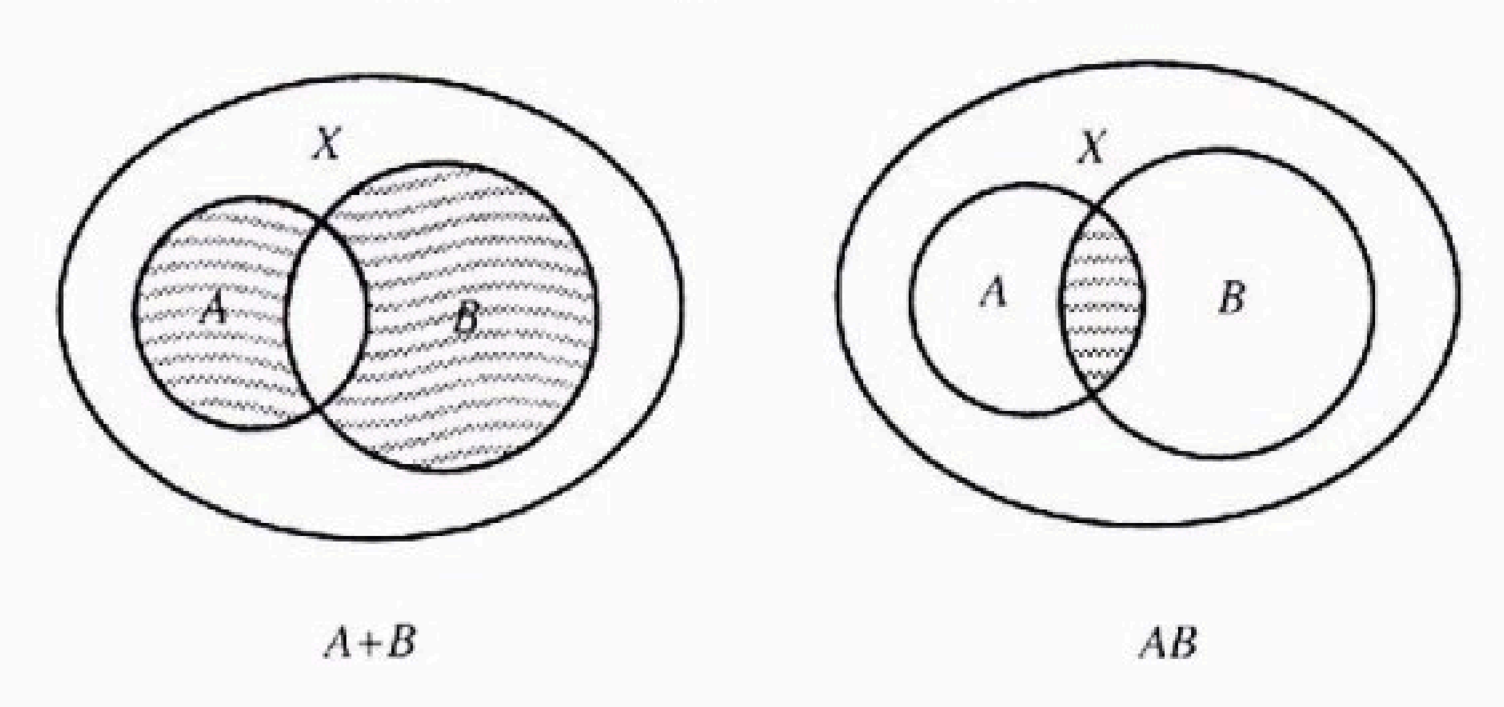
حيث يرمز $C \backslash D$ إلى المجموعة التي تحوي العناصر التي تنتمي إلى $C$ ولا تنتمي إلى $D$. هذان التعريفان يحققان شروط الحلقة. مثال ذلك:

$$A + \phi = (A \cup \phi)\backslash(A \cap \phi) = A\backslash\phi = A = \phi + A$$

لذلك فإن $\phi$ المحايد الجمعي أو الصفر . أيضا :

$$A + A = (A \cup A)\backslash(A \cap A) = A\backslash A = \phi$$

لذلك فإن $A$ هو معكوس نفسه الجمعي ، أي أن $-A = A$ . سنترك التأكد من تحقق باقي شروط الحلقة كتمرين . بعض هذه الشروط واضح وبعضها يحتاج إلى تفكير بسيط ولكنها تبدو للعيان أكثر وضوحا باستخدام أشكال فن (Venn diagrams) :




$A+B$ $AB$

لاحظ أنه عندما يكون الضرب إبداليا كما في هذه الحالة فإن أحد قانوني التوزيع يؤدي إلى الآخر ، لذلك يكتفى بالتأكد من أحدهما .

**مثال حلقة (٧)**

نفرض أن $M_n(K)$ مجموعة كل المصفوفات المربعة من النوع $n$ على الحقل $K$ . يستطيع القارئ أن يتصور أن $K$ هو حقل الأعداد الحقيقية إذا رغب .

لنتذكر عمليتي الجمع والضرب في $M_n(K)$ . إذا كان $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ عنصرين من $M_n(K)$ ، فإن

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$AB = (c_{ij})$$

حيث

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

يلاحظ أن $M_n(K)$ تشكل حلقة بالنسبة لهاتين العمليتين . وترتبط هذه الحلقة بشكل أساسي بحلقة أخرى ، من المحتمل أن يكون القارئ قد تعرف عليها ، وهي حلقة

التحويلات الخطية لفضاء متجه على $K$ ذي بعد $n$، وسندرس هذه العلاقة بتفصيل أكثر لاحقا. إذا كان $n > 1$، فإن هذه الحلقة غير إبدالية وبهذا فهي تختلف عن الأمثلة السابقة. يستطيع القارئ أن يلاحظ ذلك باعتبار المصفوفتين :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أو مصفوفات أخرى شبيهة لهما .

**مثال حلقة (٨)**

لكل مجموعة $X$ (حتى ولو كانت خالية وتستطيع استبعادها إذا رأيت ذلك) تشكل مجموعة كل التطبيقات $f : X \to \mathbb{R}$ حلقة بالنسبة للعمليتين المعرفتين هكذا :

$$(f + g)\,(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fg)\,(x) = f(x)\,g(x)$$

يسمى هذا أحيانا التعريف النقطي (pointwise definition) للجمع والضرب، وهو يستخدم بنية الحلقة $\mathbb{R}$ في إعطاء بنية الحلقة لمجموعة التطبيقات. سنترك للقارئ التفاصيل (والتعميم ؟). إذا كانت $X$ هي $\mathbb{R}$ فإن حلقات أخرى يمكن الحصول عليها بهذه الكيفية ؛ فعلى سبيل المثال، تشكّل مجموعة الدوال المستمرة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ ومجموعة الدوال القابلة للتفاضل من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ . . . الخ كلها حلقات بالنسبة للعمليتين النقطيتين المشار إليهما سابقا .

**مثال حلقة (٩)**

لتكن $\mathbf{1}$، $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ عناصر من $M_2(\mathbb{C})$ معرفة كما يلي :

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\ \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه يمكن إساءة استخدام الرموز باستعمال رمز واحد للإشارة إلى حاجتين مختلفتين، فعلى سبيل المثال يرمز 1 إلى العدد المركب 1 كما يرمز إلى المصفوفة المحايدة من النوع $2 \times 2$ على $\mathbb{C}$، بالرغم من أنه يمكن استخدام طابعتين للتمييز بينهما .

هذه الممارسة غير المناسبة ضرورية دائما في الرياضيات إذا أريد تجنب الانغماس في فوضى الرموز، ولكن من الضروري أن يلاحظ ذلك عندما يحدث.

نفرض أن $V$ هي مجموعة كل العناصر من $M_2(\mathbb{C})$ التي على الصيغة :

$$\mathbf{x} = a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . وعليه فالصيغة العامة لعنصر من $V$ هي :

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . يمكن التحقق مباشرة أن ضرب المصفوفات $\mathbf{l, i, j, k}$ يكون حسب ما يلي :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \qquad (2)$$

ومعادلتين مشابهتين لـ $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ نحصل عليهما بإبدال $\mathbf{k}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{i}$ دورويا.

يمكن باستخدام قوانين المصفوفات أن نثبت أن مجموع وحاصل ضرب أي عنصرين من V ينتميان لها، وأنه إذا كان $x \in V$ فإن $-x$ كذلك. لذلك فإن عمليتي الحلقة $M_2(\mathbb{C})$ تعينان عمليتين مناظرتين على $V$. وبذلك فإن شروط الحلقة تتحقق على $V$، وبالتالي فإن $V$ حلقة جزئية (subring) من $M_2(\mathbb{C})$ وسنقدم مفهوم الحلقة الجزئية بدقة لاحقا. تسمى $V$ حلقة المرباعيات (ring of quaternions).

إذا كانت $x$ كما في (1)، فإننا نعرف $\bar{\mathbf{x}}$ نعرف كما يلي :

$$\bar{\mathbf{x}} = a\mathbf{l} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

تسمى $\bar{\mathbf{x}}$ المرباع المرافق (conjugate) لـ $\mathbf{x}$. يستطيع القارئ، بحساب $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}$، باستخدام العلاقات في (2)، أن يتحقق من أن كل مصفوفة غير صفرية في $V$ تكون غير شاذة ومعكوسها في $V$. في الحقيقة إذا كانت $\mathbf{x}$ لا تساوي صفرا، فإن :

$$\mathbf{x}^{-1} = \lambda\bar{\mathbf{x}}$$

حيث $\lambda$ هو العدد الحقيقي $1/(a^2+b^2+c^2+d^2)$ . لذلك فإن القسمة على عناصر غير صفرية ممكنة دائما في $V$. ومن ناحية أخرى فإن الضرب في $V$ غير إبدالي، كما يلاحظ ذلك في العلاقات (2). لذلك يمكن أن يقال بشكل عام، إن حلقة المرباعيات هي أسوأ بدرجة ما من حلقة الأعداد المركبة. ويلاحظ أن $V$ تحوي عدة مجموعات

جزئية تشابه $\mathbb{C}$ مثل $\{a\mathbf{l} + b\mathbf{i}\}$ و $\{a\mathbf{l} + b\mathbf{j}\}$ . . . الخ . ستسمح لنا فكرة التماثل لاحقا بأن نكون أكثر دقة .

**مثال حلقة (١٠)**

نفرض أن $A$ زمرة جمعية إبدالية إختيارية . نقول عن تشاكل (homomorphism) من A إلى نفسها بأنه **تشاكل داخلي** (endomorphism)، أي أن $\alpha : A \to A$ تطبيق يحقق الشرط $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ . يمكن أن تعطى مجموعة كل التشاكلات الداخلية $\text{End}\, A$ للزمرة $A$ بنية الحلقة بطريقة طبيعية بتعريف الجمع والضرب كما يلي :

$$(\alpha + \beta)(a) = \alpha(a) + \beta(a)$$

$$(\alpha\beta)\,(a) = \alpha(\beta(a))$$

لكل $a \in A$ ولكل $\alpha, \beta \in \text{End}\, A$ . لذلك فإن تعريف الجمع هو نقطي، والضرب هو تركيب تطبيقات . يجب على القارئ أن يقنع نفسه أن ذلك يجعل $\text{End}A$ حلقة . نشير إلى أن الخطوة الأولى لمعرفة أن حواصل جمع التشاكلات الداخلية وضربها تمثل تشاكلات داخلية هي التأكد من أن التعاريف السابقة تعطي عمليات ثنائية على $\text{End}A$ . و يلاحظ أن كون $A$ زمرة إبدالية، هو الذي يضمن ذلك بينما لا يكون ذلك صحيحا في الزمر بصفة عامة .

**بعض «اللاأمثلة»**

قد يكون تمرينا مفيدا أن يدرس لماذا لا تحقق بعض الحالات المرشحة لتكوين حلقة شروط الحلقة؟ نترك للقارئ أن يعرف لماذا لا تحقق المجموعات التالية (مع عمليات ثنائية واضحة) شروط الحلقة .

(أ) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة .

(ب) مجموعة الأعداد النسبية التي لا يقبل مقامها القسمة على 4 .

(جـ) المجموعة الجزئية من $M_2(\mathbb{C})$ والتي تحوي المصفوفات التي تكون عناصر قطرها أصفارا .

(د) مجموعة القوة $P(X)$ لمجموعة غير خالية $X$، حيث يعاد تعريف الجمع كما يلي :

$$A + B = A \cup B$$

أما الضرب فنفس تعريفه سابقا .

(هـ) مجموعة المصفوفات من النوع $m \times n$ $(m > n)$ على $\mathbb{C}$ .

(و) مجموعة المتجهات ذات البعد 3 مع استخدام الجداء التصالبي (cross product) كعملية ضرب .

## ٣ - بعض الأنواع الخاصة من الحلقات

لقد سبق أن لاحظنا من قائمة الأمثلة ، أن الحلقات التي تصادفنا في حياتنا الواقعية غالبا ما تحقق شروطا أخرى بالإضافة إلى شروط الحلقة . لهذا السبب فإنه من المفيد أن نميز هذه الأنواع الخاصة والمهمة من الحلقات ونعطيها أسماء ، ولكن قبل ذلك سنحصل على بعض النتائج الأولية المستخلصة من تعريف الحلقة والتي غالبا ما نحتاج إليها .

**(١-٢) مأخوذة**

*إذا كانت $R$ حلقة ، فإن*

$$\text{(i)} \quad r0 = 0r = 0$$

$$\text{(ii)} \quad (-r)s = r(-s) = -(rs)$$

$$\text{(iii)} \quad (-r)(-s) = rs$$

*لكل* $r, s \in R$ .

**البرهـــان**

(i) لما كان 0 هو المحايد الجمعي ، فإن $0 = 0 + 0$ وبالتالي $r0 = r(0 + 0)$ . باستخدام قانون التوزيع نحصل على $r0 = r0 + r0$ لذلك $r0 + 0 = r0 + r0$ . حسب قانون الاختصار (الذي يصح في أية زمرة) نحصل على $r0 = 0$ ، بالمثل $0r = 0$ .

(ii) نلاحظ أن $r + (-r) = 0$ . وباستخدام (i) وقانون التوزيع نحصل على $(r + (-r))s = 0s = 0$ وبالتالي $rs + ((-r)s) = 0$ . لكون $-(rs)$ هو المعكوس الجمعي

للعنصر $rs$ فإن $rs + (-(rs)) = 0$. حسب قانون الاختصار في الزمر نحصل على $(-r)s = -(rs)$. بالمثل نحصل على $r(-s) = -(rs)$.

(iii) باستخدام (ii) بشكل متكرر نحصل على

$$(-r)\ (-s) = -(r(-s)) = -(-(rs))$$

الآن لكل $t \in R$، يلاحظ أن $-t$ هو الحل الوحيد للمعادلة $t + x = 0$. لذلك فإن المعادلة $(-t) + (t) = 0$ تؤدي إلى أن $-(-t) = t$. وهكذا فإن $-(-(rs)) = rs$.

### (١-٣) قانون التجميع العام

من المهم أن نلاحظ أن عملية الضرب في الحلقة تسمح بضرب عنصرين فقط. وإذا أردنا أن نضرب ثلاثة عناصر $a, b, c$ على هذا الترتيب، نحتاج أن نعيّن كيفية إجراء الضرب بإدخال أقواس مثل $a(bc)$ والذي يعني أن نحسب نتيجة ضرب $bc$ أولا ثم نضرب الناتج بـ $a$ من اليسار. في حالة وجود ثلاثة عناصر توجد طريقتان لإجراء عملية الضرب وهما تناظران $(ab)c$ و $a(bc)$. يخبرنا قانون التجميع بأن هاتين الطريقتين تعطيانا نفس الناتج، لذلك نستطيع أن نهمل الأقواس. وعندما نحسب حاصل الضرب $abc$ فإننا - ضمنا - نضع الأقواس في مكان ما، ولكن الجواب لا يعتمد على أين توضع الأقواس، لذلك فإن الرمز abc له معنى واحد فقط. لم يتضمن قانون التجميع، كما تم توضيحه سابقا، أي شيء حول حاصل الضرب $a_1\ a_2 \dots a_n$ لأكثر من ثلاثة عناصر. هل الرمز $a_1\ a_2 \dots a_n$ له معنى وحيد أينما وضعنا الأقواس؟ الجواب نعم، ويمكن استنتاجه من قانون التجميع العادي. لما كان القارئ لديه سابق خبرة، من خلفيته من الزمر، عن ذلك النوع من المناقشة فإننا سنترك تفاصيل إثبات ذلك. في الحقيقة، من الصعوبة إعطاء برهان مقنع تماما، وتكمن تلك الصعوبة في كيفية طرح السؤال بطريقة مناسبة، لكن يستطيع القارئ بسهولة تكوين فكرة عما ينبغي عمله بتجربة وضع أقواس في حاصل ضرب أربعة عناصر وحاصل ضرب خمسة عناصر، وملاحظة كيفية تحول هذه الأقواس إلى أخرى بواسطة التطبيق المتكرر لقانون التجميع. للحصول على وصف دقيق لذلك، يمكن الرجوع إلى صفحة ١٨ في المرجع [Jacobson, 1951]. ملاحظات مشابهة تُطبقّ بالطبع على الجمع أو على أية عملية ثنائية تجميعية.

سنقدم الآن بعض الأنواع الخاصة من الحلقات.

**الحلقات الإبدالية(commutative rings)**

هي حلقات يكون الضرب فيها إبداليا، أي أن $ab = ba$ لأي عنصرين اختيارين $a, b$ من الحلقة.

**حلقات بمحايد ضربي(rings with a multiplicative identity)**

وتسمى عادة **حلقات بمحايد**، وكما يوضح الإسم فالحلقة في هذا النوع من الحلقات تحوي عنصرا يرمز له بالرمز 1 ، بحيث إن $r1 = 1r = r$ لكل عنصر r في الحلقة. نلاحظ أن $\{0\}$ تحوي عنصرا واحدا وهي حلقة بمحايد هو في هذه الحلقة طبعا 0. يتضح أن في أية حلقة بمحايد يكون 1 وحيدا. لأنه إذا كانت $R$ حلقة بمحايد ولها محايد ضربي آخر $e$، فإن:

$$e = e1 = 1$$

**الحلقات التامة (integral domains)**

يعرف قاسم الصفر (zero divisor) لحلقة إبدالية $R$ بأنه عنصر $r$ من $R$ بحيث إن

(i) $r \neq 0$

(ii) يوجد $s \neq 0$ في R بحيث $rs = 0$

والحلقة التامة هي حلقة إبدالية بمحايد يختلف عن الصفر وليس فيها قواسم للصفر. (في التعامل مع الحلقات غير الإبدالية نحتاج إلى أن نُميز بين القواسم اليسرى للصفر والقواسم اليمنى للصفر. سنركز في هذا الكتاب على الحلقات الإبدالية فقط، وسنتجنب الخوض في هذه الاعتبارات). الحقيقة التالية مهمة في الحلقات التامة.

**(١-٤) مأخوذة**

*إذا كانت $R$ حلقة تامة وكان $a$ عنصرا غير صفري في $R$ وكان $x, y$ عنصرين من $R$، فإن:*

$$ax = ay \Rightarrow x = y$$

*يسمى هذا بقانون الاختصار للضرب .*

**البرهان**

إذا كان $ax = ay$ ، فإنه من شروط الحلقة نحصل على $a(x - y) = 0$ . لما كان $a$ ليس قاسما للصفر ، فإن $x - y = 0$ وبالتالي $x = y$ .

**الحقول (fields)**

الحقل حلقة إبدالية تكوّن مجموعة عناصرها غير الصفرية زمرة بالنسبة لعملية الضرب . لذلك إذا كان $K$ حقلا ، فإن $K$ يحتوي عنصرا $1 \neq 0$ بحيث إن $1x = x$ لكل عنصر غير صفري $x$ في $K$. لما كان $1.0 = 0$ (حسب المأخوذة ١-٢) ، فإن 1 هو المحايد الضربي ، وبالإضافة إلى ذلك فإنه لكل عنصر غير صفري $a$ في $K$ يوجد عنصر $a^{-1}$ في $K$ بحيث إن $a\,a^{-1} = 1$ . يمكن بسهولة إثبات أن الحقل لا يحوي قواسم للصفر ، لأنه إذا كان $a$ عنصرا غير صفري في $K$ وكان $ax = 0$ فإن :

$$x = 1x = a^{-1}\,ax = a^{-1}\,0 = 0$$

وعليه لدينا العلاقات التالية بين الأنواع الأربعة من الحلقات التي سبق ذكرها :




لكي يستطيع القارئ أن يلقي بعض الضوء على هذه التعاريف ، فإنه يحتاج إلى القيام بالمهمتين التاليتين : الأولى أن يدرس إلى أي نوع تنتمي أمثلة الحلقات ١ - ١٠ ، والثانية إعطاء أمثلة توضح أنه لا يوجد اثنان من الفصول السابقة متساويان .

## تمارين على الفصل الأول

١ - هل تشكل مجموعة الأعداد الصحيحة شبه زمرة تحت تأثير عملية الطرح ؟

٢ - أية مجموعة من المجموعات التالية تشكل حلقة ؟

(i) مجموعة الدوال المستمرة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث الجمع هو الجمع النقطي والضرب هو تركيب الدوال .

(ii) مجموعة الأعداد النسبية التي يعبر عنها بالصيغة $a/b$ ، حيث $b$ و $a$ عددان صحيحان ، وكذلك $p$ لا يقسم $b$ ، حيث $p$ يرمز إلى عدد أولي ثابت ، والعمليتان هما العمليتان العاديتان .

(iii) مجموعة الأعداد الصحيحة وبحيث يكون الجمع والضرب معرفين عليها اعتمادا على العمليتين العاديتين كما يلي :

$$n \dotplus m = n + m + 1$$

$$n \times m = n + m + nm$$

٣ - أثبت أن $x^2 = x$ لكل $x$ في الحلقة $\mathscr{P}(X)$، والتي سبق أن أعطيت في مثال حلقة (٦) . في أي من الحلقات $\mathbb{Z}_n$ يكون ذلك صحيحا ؟

٤ - ليكن $\alpha$ و $\beta$ تشاكلين داخليين لزمرة $G$ ليست بالضرورة إبدالية ، وليكن $\alpha + \beta$ معرفا كما يلي :

$$(\alpha + \beta)\ (x) = \alpha(x)\ \beta(x)$$

لكل $x \in G$ . تحت أي شروط يكون $\alpha + \beta$ تشاكلا داخليا ؟ أعط مثالا لتوضيح أن هذه الشروط لا تكون دائما محققة .

٥ - إذا كانت $R$ حلقة تامة بحيث إن $x^2 = x$ لكل $x \in R$ فأثبت أن $R$ بها عنصران فقط .

٦ - إذا كانت $R$ حلقة بمحايد 1 ، فأثبت أنه إما $0 \neq 1$ أو $R = \{0\}$ .

٧ - أثبت أن كل حلقة تامة بها عدد منته من العناصر تشكل حقلا .

(**إرشاد** : افرض أن $a$ عنصر غير صفري في $R$ واعتبر التطبيق $x \to ax$ من $R$ إلى $R$. أثبت أنه تطبيق متباين وعليه يكون غامرا ) .

٨ - نفرض أن $S$ مجموعة ، وأن $R$ حلقة ، وأن f تقابل $S \to R$ . ولنعرف عمليتي الجمع والضرب على $S$ كما يلي :

$$\left.\begin{array}{r} s+s' = f^{-1}\left(f(s)+f(s')\right) \\ ss' = f^{-1}\left(f(s)+f(s')\right) \end{array}\right\} \quad s,\ s' \in S$$

أثبت أن $S$ تشكل حلقة بالنسبة لهاتين العمليتين. أوجد عمليات على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة تجعلها حلقة.



# الفصل الثاني

# الحلقات الجزئية، التشاكلات والمثاليات

عندما نقابل نوعا جديدا من البنى الرياضية، فإن أول ما نحاول دراسته كالعادة هو البنى الجزئية لها وكذلك «الاقترانات (morphisms)»، أي التطبيقات التي تحافظ على البنية للبنى الرياضية المطلوب دراستها، وهذا هو الهدف من هذا الفصل.

## ١ – الحلقات الجزئية

**(٢–١) تعريف**

**الحلقة الجزئية (subring)** *من حلقة $R$ هي مجموعة جزئية $S$ من $R$ تشكل حلقة تحت تأثير نفس العمليات التي ورثتها من $R$.*

**ماذا يعني التعريف المذكور أعلاه؟** يعني أولا، أن العمليات على $R$ تحدد العمليات على $S$. في حالة الجمع، على سبيل المثال، إن قيد التطبيق $R \times R \to R$ المعرف بـ $(a, b) \to a + b$ على $S \times S$ يجب أن يعطي تطبيقا من $S \times S$ إلى $S$؛ أي أنه إذا كان $a, b$ عنصرين من $S$ فإن $a + b$ يجب أن ينتمي إلى $S$. بالمثل $-a$ و $ab$ ينتميان إلى $S$. وعليه فإن $a-b = a + (-b)$ ينتمي إلى $S$. ونشير إلى نقطة أخرى قد تغيب عن البال، وهي أنه لما كانت $S$ تشكل بالنسبة لعملية الجمع زمرة فإنها يجب أن تكون غير خالية. لذلك نكون قد أثبتنا نصف المأخوذة التالية.

**(٢-٢) مأخوذة**

*إذا كانت $S$ مجموعة جزئية من حلقة $R$ فإن $S$ تكون حلقة جزئية من $R$ إذا، وفقط إذا كان*

(i) $S$ *غير خالية*

(ii) *طالما كان* $a, b \in S$ *فإن* $ab, a - b \in S$

**البرهـــان**

لقد أثبتنا أن الشروط السابقة ضرورية . سنثبت الآن أنها كافية . لما كانت $S$ غير خالية، فإنها تحوي عنصرا وليكن $a$ وبالتالي فإن $a - a = 0$ ينتمي إلى $S$. وعليه فإن $0 - b = -b$ ينتمي إلى $S$ وبالتالي $a + b = a - (-b) \in S$ . لذلك فإن العمليتين الثنائيتين والعملية الأحادية على $R$ تولد عمليات مناظرة على $S$. كما يلاحظ أن قانوني الإبدال والتجميع صحيحان بالنسبة لعملية الجمع على $S$ بالوراثة من $R$؛ لأنه إذا جمعنا عناصر من $S$، فيمكن النظر إليها كعناصر من $R$. وإذن $S$ زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الجمع والمحايد الجمعي هو $0$. يلاحظ أن قانون التجميع صحيح بالنسبة لعملية الضرب، وأن قانوني التوزيع صحيحان على $S$ بالوراثة من $R$، وإذن $S$ حلقة .

**أمثلة**

١ - يلاحظ أن كلا من $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ تشكل مع العمليات الاعتيادية حلقة جزئية من التي تليها .

٢- يلاحظ أن حلقة المرباعيات والتي سبق أن نوقشت في مثال حلقة (٩) تشكل حلقة جزئية من $M_2(\mathbb{C})$ .

٣ - تشكل مجموعة كل المصفوفات من النوع $n \times n$ على الحقل $K$ والتي تكون جميع عناصرها تحت القطر أصفارا، حلقة جزئية من $M_n(K)$.

سنحتاج الآن أن نقدم قدرا معينا من الرموز المفيدة، البعض منها مألوف والبعض الآخر قد لا يكون مألوفا .

**ترميز**

١ - عندما نتعامل مع الحلقة $R$، من المفيد غالبا أن نفكر في $R$ كزمرة تحت تأثير البنية الجمعية التي تملكها متجاهلين بنية الضرب . عندما نركز على ذلك سنكتب $R^+$ بدلا من $R$، وتسمى $R^+$ الزمرة الجمعية (additive group) للحلقة $R$. نلاحظ أن $R$ ترمز إلى نظام يحوي مجموعة وعمليتين ثنائيتين وعملية أحادية على هذه المجموعة وعنصرا مختارا من المجموعة، بينما ترمز $R^+$ إلى نفس النظام مع حذف عملية الضرب . غالبا ما تسمى الزمر الجزئية من $R^+$ بزمر جمعية جزئية (additive subgroups) من $R$. وعلى ذلك فإن الزمرة الجزئية الجمعية من $R$ هي مجموعة جزئية $S$ من $R$ تحتوي على 0 وتحقق الشرط أنه إذا كان $a , b \in S$ فإن $a - b \in S$ .

٢ - إذا كانت $A$ زمرة إبدالية جمعية، وكان $a \in A$، وكان $n$ عددا صحيحا فإن $na$ يعرف كما يلي :

إذا كان $n > 0$ $\quad na = a + ... + a$ ($n$ من المرات)

$$0a = 0$$

إذا كان $n < 0$ $\quad na = (-n)(-a) = -(a + . . . + a) = -(|n|\, a)$

إذا كان $a, b \in A$ وكان $n, m$ عددين صحيحين فإن :

$$n(a + b) = na + nb$$

$$(n + m)\, a = na + ma$$

$$(nm)\, a = n(ma)$$

$$1a = a$$

نود أن نشير إلى أنه قد تكون الحقائق البسيطة المذكورة آنفا مألوفة لدى القارئ وإذا رغب الاطلاع على إثباتها، فعليه الرجوع إلى أي كتاب في مبادئ نظرية الزمر .

نستطيع، بصفة خاصة، أن نعتبر $A$ هي الزمرة الجمعية $R^+$ لأي حلقة $R$، ولذلك فإن التعاريف المذكورة أعلاه صحيحة في أي حلقة $R$ . ومن الضروري التفريق بين العملية $(n, a) \to na$ والضرب في الحلقة؛ لأنه لا يمكن اعتبار $n$ عنصرا من $R$ بصفة عامة .

من ناحية ثانية ، يمكن أن يحدث في بعض الأحيان أن تتطابق $\mathbb{Z}$ مع حلقة جزئية من $R$ إلى الحد الذي يجعل العدد الصحيح 1 يؤدي دور المحايد الضربي في $R$ . في هذه الحالة ، إذا كان $n > 0$ ، فإنه باستخدام قانون التوزيع :

$$na = (1 + ... + 1)\, a = a + ... + a$$

لذلك فإنه في هذه الحالة يكون للرمز $na$ نفس المعنى إذا اعتبرناه حاصل ضرب عناصر أو اعتبرناه حسب التعريف السابق . وبنفس الطريقة يمكن اعتبار $(-n)\, a, 0a$ . وهكذا فإنه لا يوجد احتمال حدوث أي لُبْس .

إذا كان a عنصرا من حلقة $R$ وكان $n$ عددا صحيحا موجبا فإن

$a^n = a...a$ ($n$ من المرات) .

أيضا ، إذا كان $n, m > 0$ فإنه يلاحظ أن :

$$a^{n+m} = a^n \,.\, a^m \quad , \quad a^{nm} = (a^n)^m$$

إذا كانت $R$ حلقة بمحايد فإننا نعرف $a^0 = 1$ حيث $0 \neq a \in R$ ، كما أن المتطابقات المشار إليها تبقى صحيحة .

٣ - نفرض أن $T$ و $S$ مجموعتان جزئيتان غير خاليتين واختياريتان من حلقة $R$ . نعرف :

$$S + T = \{s + t : s \in S \,,\, t \in T\}$$

$$ST = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i\, t_i : s_i \in S,\, t_i \in T,\, n = 1, 2, ... \right\}$$

لنركز بشكل خاص علي الحالة التي تكون فيها كل من $S, T$ زمرة جمعية جزئية من $R$ ، وقد عرف المجموع والجداء لزمرتين جمعيتين جزئيتين بهذه الطريقة حتى يكون كل منهما زمرة جمعية جزئية .

**(٢-٣) مأخوذة**

*إذا كانت $R$ حلقة ، وكانت $U$ ، $T$ و $S$ مجموعات جزئية غير خالية من $R$ ، فإن :*

(i) $(S + T) + U = S + (T + U)$ ، $(ST)U = S(TU)$

(ii) *إذا كانت $T$ و $S$ زمرتين جزئيتين جمعيتين من $R$ فإن كلا من $S + T$ و $ST$ تكون كذلك .*

(iii) *إذا كانت $T$ و $S$ حلقتين جزئيتين من $R$، وكانت $R$ إبدالية، فإن $ST$ حلقة جزئية من $R$.*

**البرهـــان**

(i) من الواضح أن $(S + T) + U = S + (T + U)$ . لما كانت $ST$ تحوي كل المجاميع المنتهية من العناصر التي على الشكل st، حيث $t \in T$ و $s \in S$، فإن $ST$ مغلقة بالنسبة للجمع، وهكذا فإن $(ST)U$ و $S(TU)$ مغلقتان أيضا بالنسبة للجمع. إذا كان z عنصرا اختياريا من $(ST)U$ فإن z هو مجموع منته لعناصر على الشكل $xu$ حيث $u \in U$ و $x \in ST$. لذلك فإن $x$ مجموع منته من عناصر على الشكل $st$ حيث $t \in T$، $s \in S$، وبالتالي فإن z هو مجموع عناصر على الشكل $(st)u$. لما كان $(st)u = s(tu)$، فإن هذه العناصر جميعها تنتمي إلى $S(TU)$. لكن $S(TU)$ مغلقة بالنسبة للجمع لذلك فإن $z \in S(TU)$. وإذن $(ST)U \subseteq S(TU)$. والعكس يمكن إثباته بطريقة مماثلة.

(ii) إذا كان $x, x' \in S + T$. فإن $x' = s' + t'$ و $x = s + t$ حيث $t, t' \in T$ و $s, s' \in S$. لذلك $x - x' = (s - s') + (t - t') \in S + T$ لأن $S, T$ زمرتان جمعيتان. علاوة على ذلك فإن 0 ينتمي إلى $S$ وينتمي إلى $T$، وبالتالي $0 = 0 + 0 \in S + T$ وإذن $S + T$ زمرة جمعية جزئية من $R$.

نعتبر الآن $ST$. لقد لاحظنا أنها مغلقة بالنسبة للجمع. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $y = \Sigma s_i t_i \in ST$ فإن $-y = \Sigma(-s_i)\, t_i \in ST$ لأن $-s_i \in S$. لما كان من الواضح أن $ST$ تحوي 0، فإنها تشكل زمرة جمعية جزئية من $R$.

(iii) لقد سبق ملاحظة أن $ST$ زمرة جمعية جزئية من $R$. لذلك يكفي أن نثبت أن $ST$ مغلقة بالنسبة للضرب. حاصل الضرب:

$$\left(\sum_i s_i\, t_i\right)\left(\sum_j s'_j\, t'_j\right) = \sum_{i,\, j}\left(s_i\, s'_j\right)\left(t_i\, t'_j\right)$$

لأن $R$ إبدالية، وبالتالي فإن حاصل الضرب هذا عنصر من عناصر $ST$.

## ٢ – التشاكلات (homomorphisms)

**(٢–٤) تعريف**

يقال عن التطبيق $\phi : R \rightarrow S$ من الحلقة $R$ إلى الحلقة $S$ إنه تشاكل إذا حقق الشرطين التاليين :

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad (1)$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\ \phi(y) \quad (2)$$

لكل $x, y \in R$ .

يلاحظ من المعادلة (١) أن $\phi$ يمثل بصفة خاصة تشاكل زمر من $R^+$ إلى $S^+$ وباستخدام خواص تشاكل الزمر نحصل على :

$$\phi(0_R) = 0_s\ ,\ \phi(-r) = -\phi(r)$$

لكل $r \in R$ ، حيث $0_R$ هو صفر الحلقة $R$ .

لقد جرت العادة في كتب الرياضيات المؤلفة باللغة الإنجليزية أن تُصدَّر كلمة "morphism" ببوادئ مختلفة للتمييز بين أنواع مهمة ومختلفة من التشاكلات . إذا كانت $R, S$ حلقتين ، فإننا :

(أ) نسمي التشاكل $R \rightarrow S$ تماثلا (isomorphism) إذا كان متباينا وغامرا ، أي إذا كان تقابلا .

(ب) نسمي التشاكل من الحلقة $R$ إلى نفسها بالتشاكل الداخلي (endomorphism) .

(جـ) نسمي التماثل من الحلقة إلى نفسها بالتماثل الذاتي (automorphism) .

كما يمكن التحقق بسهولة من أن تركيب تشاكلين تشاكل وأيضا تركيب تشاكلين متباينين تشاكل متباين (monomorphism) ، وهكذا في حالة تركيب تشاكلين غامرين تشاكل غامر (epimorphism) وكذلك تركيب تماثلين تماثل . ويمكن الحصول على هذه النتائج بشكل مباشر من كون تركيب تطبيقين متباينين أو غامرين يكون متباينا أو غامرا على التوالي . بالإضافة إلى ذلك ، إذا كان $\phi : R \rightarrow S$ تماثل حلقات ، فإن معكوس التطبيق $\phi$ ، أي $\phi^{-1} : S \rightarrow R$ (الذي يوجد لأن $\phi$ تقابل (bijection)) يكون تماثلا . لأنه إذا كان $s'$ و $s$ عنصرين من $S$ فإنه يوجد عنصران $r'$ و $r$ في $R$ بحيث إن $s = \phi(r)$ و $s' = \phi(r')$ ، وبالتالي فإن

$$\phi^{-1}(ss') = \phi^{-1}(\phi(r)\ \phi(r')) = \phi^{-1}(\phi(rr')) = rr' = \phi^{-1}(s)\ \phi^{-1}(s')$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\phi^{-1}(s + s') = \phi^{-1}(s) + \phi^{-1}(s')$$

إذا كان يوجد تماثل من $R$ إلى $S$ فإننا نكتب $R \cong S$ ونقول إن $R$ تماثل (حلقاتيا) $S$. وإن الرمز "$\cong$" له خواص علاقة التكافؤ، أي

(i) $R \cong R$

(ii) $R \cong S \Rightarrow S \cong R$

(iii) $R \cong S,\ S \cong T \Rightarrow R \cong T$

وهذه نتائج لما ذكر أعلاه . بشكل تقريبي تكون حلقتان متماثلتين إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بإعادة تسمية العناصر فقط وإبقاء جدولي الجمع والضرب دون تعديل، لذلك فإن الحلقات المتماثلة لها نفس الخواص الجبرية . إن مفهوم التماثل يسمح لنا الآن أن نضبط بعض الملاحظات الغامضة بالفصل الأول. إن كلا من المجموعات الجزئية :

$\{a\mathbf{l} + b\mathbf{i}\}$ ، $\{a\mathbf{l} + b\mathbf{j}\}$ . . . الخ

هي حلقة جزئية من حلقة المرباعيات المشار إليها في مثال حلقة (٩) وإن كلا منها يماثل (حلقة) الأعداد المركبة .

لقد سبق أن أشرنا إلى أن أي تشاكل من حلقة $R$ إلى حلقة $S$ يمكن التفكير فيه بصفة خاصة كتشاكل من $R^+$ إلى $S^+$، ونستطيع الحصول على بعض المعلومات عن هذا التشاكل بهذه الوسيلة . كمثال على ذلك، فإن $\phi(R)$ صورة $R$(image)، ويرمز لها بالرمز im$\phi$، هي زمرة جزئية من $S^+$ . كذلك باعتبار $\phi$ تشاكل زمر، فإن له نواة (kernel)، وهي :

$$\{x \in R : \phi(x) = 0_s\}$$

والتي غالبا ما سيرمز لها بالرمز ker$\phi$. نحن نعلم من مبادئ نظرية الزمر أن ker$\phi$ زمرة جزئية ناظمية (normal subgroup) من $R^+$ (بالرغم من أن استخدام كلمة «ناظمية» غير ضروري في هذه الحالة لكون $R^+$ زمرة إبدالية، وبالتالي أي زمرة جزئية تكون ناظمية) . باستخدام البنية الضربية نستطيع الحصول على معلومات أكثر عن ker$\phi$ وعن im$\phi$ . وبصفة خاصة، إذا كان $x$ أي عنصر من $R$ وكان $k \in \ker\phi$، فإن :

$$\phi(xk) = \phi(x)\ \phi(k) = \phi(x)\ 0_s = 0_s$$

إذن $xk \in \ker\phi$، وبالمثل يمكن إثبات أن $kx \in \ker\phi$ .

**(٢-٥) تعريف**

*يقال عن مجموعة جزئية $K$ من حلقة $R$ إنها مثالي (ideal) في $R$ إذا كانت $K$ زمرة جمعية جزئية من $R$ وكان $xk, kx \in K$ لكل $k \in K$ , $x \in R$ .*

ويمكن إعادة صياغة التعريف بطرق متعددة متكافئة . فحسب الترميز المشار إليه سابقا إن المثالي في الحلقة $R$ هو زمرة جزئية جمعية $K$ من $R$ تحقق الشرط $KR \cup RK \subseteq K$ .

وعلى نحو أكثر وضوحا إن $K$ مثالي في $R$ إذا وفقط إذا كان :

(i) $0 \in K$

(ii) $k, k' \in K \Rightarrow k - k' \in K$

(iii) $k \in K,\ x \in R \Rightarrow kx, xk \in K$

سنكتب $K \lhd R$ إذا كان $K$ مثاليا في الحلقة $R$. سنواجه أمثلة عن المثاليات في أثناء دراستنا ونشير إلى أن كلا من $\{0\}$ و $R$ يشكل دائما مثاليا في الحلقة $R$.

**(٢-٦) مأخوذة**

*نفرض أن $R$ و $S$ حلقتان وأن $\phi : R \to S$ تشاكل . عندئذ :*

(i) *$\ker\phi \lhd R$ ، ويكون $\phi$ تشاكلا متباينا إذا وفقط إذا كان $\ker\phi = \{0\}$*

(ii) *$\mathrm{im}\phi$ تشكل حلقة جزئية من $S$ .*

**البرهـــــان**

(i) لقد سبق أن أثبتنا أن $\ker\phi \lhd R$ .

نفرض الآن أن $\phi$ تشاكل متباين وأن $x \in \ker\phi$، إذن $\phi(x) = 0_s = \phi(0_R)$، وعليه فإن $x = 0_R$ وبالتالي $\ker\phi = \{0_R\}$ . وبالعكس، إذا كانت $\ker\phi = \{0_R\}$ وكان $x, y \in R$ وكان $\phi(x) = \phi(y)$، فإن $0_S = \phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y)$ . إذن $x - y \in \ker\phi$، وعليه فإن $x - y = 0_R$ وبالتالي $x = y$ . إذن $\phi$ تشاكل متباين في هذه الحالة .

(ii) سبق أن رأينا أن $\mathrm{im}\phi$ زمرة جمعية جزئية من $R$ وبقي أن نثبت أنه إذا كان $s, s' \in \mathrm{im}\phi$ فإن $ss' \in \mathrm{im}\phi$ . حسب تعريف $\mathrm{im}\phi$ يوجد $r, r' \in R$ بحيث إن $\mathrm{s} = \phi(r)$ و $s' = \phi(r')$، إذن:

$$ss' = \phi(r)\, \phi(r') = \phi(rr') \in \mathrm{im}\phi$$

بعد أن لاحظنا أن كل نواة هي مثالي، يحق لنا أن نتساءل هل كان مثالي نواة؟ أي هل كل مثالي في حلقة $R$ هو نواة لتشاكل من $R$ لحلقة أخرى؟ للإجابة عن هذا السؤال من المفيد أيضا أن ننظر إلى الزمرة الجمعية $R^+$ .

لنتذكر حالة الزمر الإبدالية . إذا كانت $A$ زمرة إبدالية، وكانت $B$ زمرة جزئية من $A$، فإن مجموعة مشاركة لـ $B$ في $A$ هي فصل تكافؤ لعلاقة التكافؤ ~ المعرفة على $A$ كما يلي:

$$x \sim y \iff x - y \in B$$

لما كانت $A$ زمرة إبدالية، فإن $B$ ناظمية في $A$، وبالتالي فإن الاختلاف بين المجموعات المشاركة اليمنى والمجموعات المشاركة اليسرى يختفي . إذا كان $x$ عنصرا من مجموعة مشاركة ما، فإن عناصر هذه المجموعة المشاركة هي $b + x$ حيث يمر $b$ على كل عناصر $B$، ويرمز لهذه المجموعة المشاركة بـ $B + x$ . يرمز لمجموعة كل المجموعات المشاركة لـ $B$ في $A$ بالرمز $A/B$. إذاعرفنا على $A/B$ العمليتين التاليتين:

$$(B + x) + (B + y) = B + (x + y)$$

$$-(B + x) = B + (-x)$$

فإن هاتين العمليتين حسنتا التعريف، أي أن الطرف الأيمن من أي من المعادلتين أعلاه يعتمد على المجموعتين المشاركتين بالطرف الأيسر ولا يعتمد على العنصرين المختارين $x, y$ لتمثيلهما . تجعل العمليتان A/B زمرة إبدالية، وتكون المجموعة المشاركة $B$ العنصر الصفري لها . التطبيق $v : x \to B + x$ تشاكل زمر غامر نواته $B$، ويسمى $v$ التشاكل الطبيعي (natural homomorphism) من A إلى $A/B$.

لنرجع إلى حالة الحلقة. لقد قطعنا مرحلة لنجد تشاكلا من الحلقة $R$ بحيث يكون المثالي المعطى $K$ نواة له. سنفكر في الحلقة كزمرة جمعية ونعتبر مجموعة كل المجموعات المشاركة R/K والتي يمكن النظر إليها كزمرة جمعية، ثم نحصل على تشاكل

زمر $\upsilon : R \to R/K$ كما هو أعلاه . نحن نرغب أن يكون $\upsilon$ تشاكل حلقات، ولكن العقبة الرئيسة هي أن $R/K$ ليست حلقة حتى الآن . هل يمكن جعل $R/K$ حلقة حتى نجعل $\upsilon$ تشاكل حلقات؟ يجبرنا الشرط $\upsilon(x)\ \upsilon(y) = \upsilon(xy)$ على تعريف الضرب في $R/K$ كما يلي :

$$(K + x)(K + y) = K + xy$$

يجب التأكد أولا من أن التعريف يعطي عملية ثنائية على $R/K$؛ أي أن المجموعة المشاركة التي على اليمين تعتمد فقط على المجموعتين المشاركتين اللتين على اليسار ولا تعتمد على العنصرين المختارين لتمثيلهما . إذا كان $K + x = K + x'$ ، وكان $K + y = K + y'$ ، فإن $x = x' + k$ و $y = y' + l$ حيث $k, l \in K$ . وبالتالي فإن :

$$xy = x'y' + (ky' + x'l + kl)$$

لما كان $K$ مثاليا في الحلقة $R$ وحيث إن $k, l \in K$ ، فإن العنصر المحصور بين قوسين ينتمي إلى $K$. لذلك :

$$K + xy = K + x'y'$$

وبالتالي فإن التعريف السابق يعطي فعلا عملية ثنائية على $R/K$. نلاحظ أن كون $K$ مثاليا في الحلقة $R$ هو الذي جعل ذلك ممكنا .

يستطيع القارئ التأكد بسهولة من أن $R/K$ تحقق شروط الحلقة وأن $\upsilon$ حقيقة تشاكل حلقات، وهكذا نكون قد حصلنا على المأخوذة التالية :

**(٢-٧) مأخوذة**

*إذا كان $K$ مثاليا في الحلقة $R$ وكانت $R/K$ هي مجموعة كل المجموعات المشاركة لـ $K$ في $R$، فإن التعاريف التالية :*

$$(K + x) + (K + y) = K + (x + y)$$

$$-(K + x) = K + (-x)$$

$$(K + x)(K + y) = K + xy$$

*تجعل $R/K$ حلقة، كما أن التطبيق الطبيعي $\upsilon : x \to K + x$ هو تشاكل غامر نواته $K$ .*

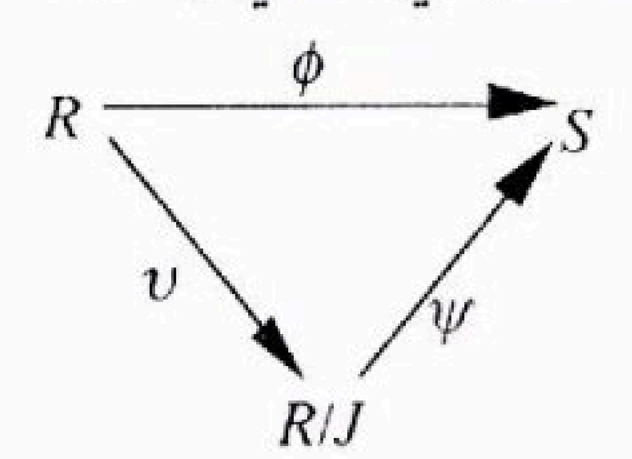
تسمى $R/K$ حلقة القسمة (quotient ring) أو حلقة فصول الرواسب (residue class ring) لـ $R$ بالنسبة إلى $K$، كما يسمى $\upsilon$ التشاكل الطبيعي (natural homomorphism) من $R$ إلى $R/K$. يلاحظ أن

$$(R/K)^+ = R^+/K$$

إن الصفة الرئيسة للتشاكل الطبيعي من الحلقة $R$ إلى حلقة قسمة $R/J$ معطاة بالمبرهنة التالية.

**(٢-٨) مبرهنة**

*نفرض أن $J \lhd R$ وأن $\upsilon : R \to R/J$ هو التشاكل الطبيعي. نفرض أن $\phi : R \to S$ تشاكل حلقات بحيث إن نواته تحوي $J$. إنه يوجد تشاكل وحيد $\psi : R/J \to S$ يجعل الرسم التخطيطي التالي إبداليا.*




*كما أن $ker\psi = ker\phi/J$.*

*(عندما يقال إن الرسم التخطيطي أعلاه إبدالي فإن ذلك يعني أنه يتم الحصول على نفس النتيجة بالذهاب من $R$ إلى $S$ باستخدام أي من الطريقين الممكنين - مباشرة أو عن طريق $R/J$. وبكلمات أخرى $\phi = \psi\upsilon$).*

**البرهـــان**

إذا كان الرسم التخطيطي إبداليا، فإن

$$\psi(J + x) = \psi\upsilon(x) = \phi(x) \qquad (*)$$

لكل $J + x \in R/J$، وعليه توجد طريقة واحدة ممكنة لتعريف $\psi$، وإذن يجب أن نتأكد من أن تعريف $\psi(J + x)$ بأنه $\phi(x)$ يفي بالغرض. أولا يعتمد التعريف على المجموعة المشاركة $J + x$ فقط وليس على الممثل $x$. لأنه إذا كان $J + x = J + x'$، فإن $x - x' \in J$، وحسب الفرض فإن هذا يعني أن $x - x' \in \ker\phi$، وبالتالي فإن $\phi(x - x') = 0$ ويؤدي

هذا إلى $\phi(x) = \phi(x')$ . لذلك فإن تعريف $\psi$ المذكور في (*) يعرف تطبيقا $\psi : R/J \to S$ . إذا كان $J + y$ عنصرا آخر من $R/J$، فإن :

$$\psi((J + x) + (J + y)) = \psi(J + (x + y)) = \phi(x + y)$$
$$= \phi(x) + \phi(y) = \psi(J + x) + \psi(J + y)$$

لذلك فإن $\psi$ يحافظ على الجمع . نستطيع بالمثل إثبات أن $\psi$ يحافظ على الضرب . وإذن $\psi$ تشاكل حلقات .

أخيرا من (*) يلاحظ أن :

$$\psi(J + x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker\phi$$

وإذن $\ker\psi = \ker\phi/J$ .

تسمى المبرهنات الثلاث التالية عادة بمبرهنات التماثل الأولى، الثانية والثالثة حسب الترتيب وهي مبرهنات تنتج بسهولة من مبرهنة (٢–٨) .

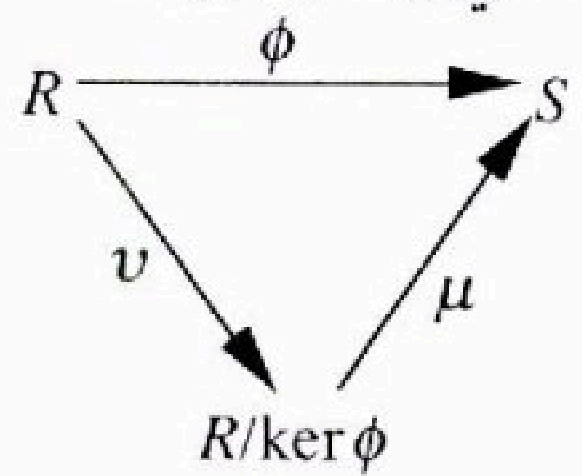
**(٢–٩) مبرهنة**

*إذا كان $\phi : R \to S$ تشاكل حلقات، فإن*

$$R/\ker\phi \cong \mathrm{im}\phi$$

**البرهـــان**

لنعتبر $J = \ker\phi$ في المبرهنة (٢–٨) . هذا يعطي التشاكل $\mu : R/\ker\phi \to S$ الذي يجعل الرسم التخطيطي التالي إبداليا ونواته

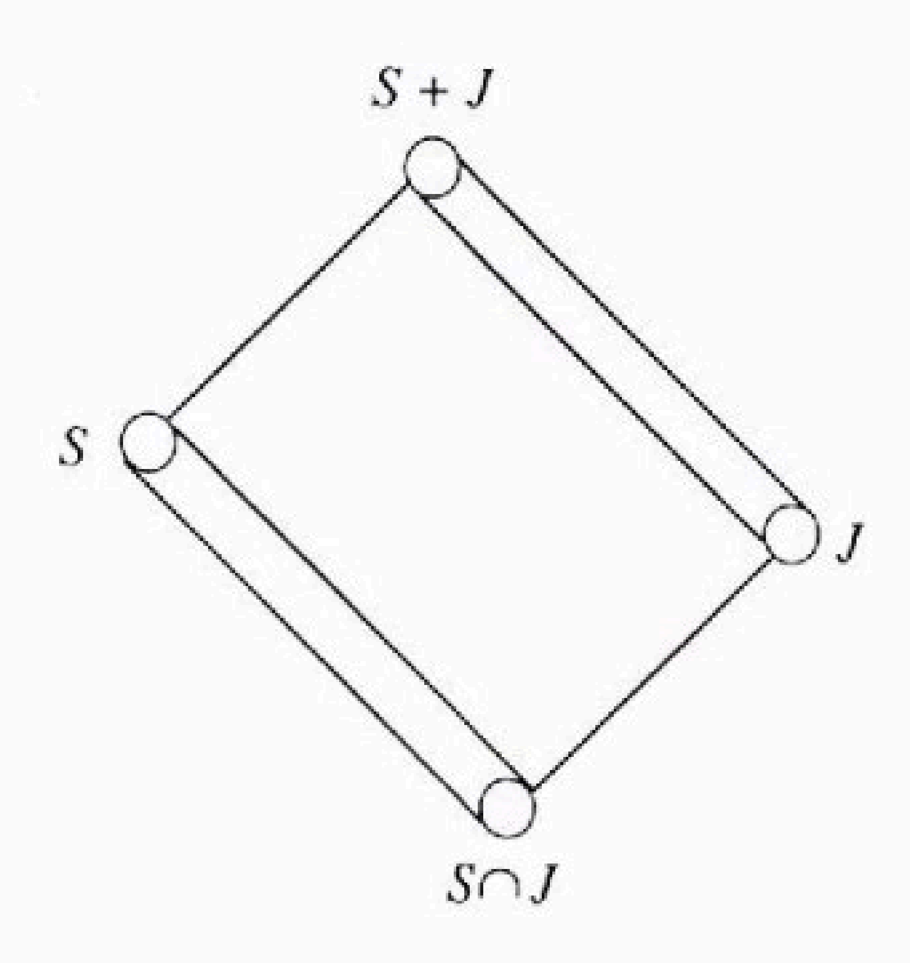



هي $\ker\phi/\ker\phi$ الحلقة الجزئية الصفرية من $R/\ker\phi$ . لذلك حسب المأخوذة (٢–٦) $\mu$ تشاكل متباين . كما ينتج من العلاقة $\phi = \mu v$ أن $\mathrm{im}\mu = \mathrm{im}\phi$ . وإذن $\mu$ يشكل تماثلا من $R/\ker\phi$ إلى $\mathrm{im}\phi$ .

**(٢-١٠) مبرهنة**

*إذا كانت $R$ حلقة، $J \lhd R$ و $S$ حلقة جزئية من $R$ فإن $S + J$ حلقة جزئية من $R$، $J \lhd S + J$، $S \cap J \lhd S$ و $S + J/J \cong S/S \cap J$.*

*قد يساعد الرسم التخطيطي التالي على تصور ما تشير إليه هذه النتيجة .*




*العلاقة «مثالي في» يعبر عنها بخطين مزدوجين والمبرهنة تنص على أن حلقتي القسمة (المناظرتين للضلعين المزدوجين المتقابلين) متماثلتان . لهذا السبب تسمى هذه المبرهنة أحيانا بقانون متوازي الأضلاع .*

**البرهـــــان**

نعلم من (٢-٣) أن $S + J$ زمرة جمعية جزئيــة من $R$. نفرض أن $s, s' \in S$ وأن $j, j' \in J$. لما كان $J$ مثاليا في الحلقة $R$، فإن:

$$(s + j)(s' + j') = ss' + (js' + sj' + jj') \in S + J$$

من الواضح أن $J \lhd S + J$. نفرض أن $v : R \to R/J$ التشاكل الطبيعي وأن $v'$ اقتصار $v$ على $S$، فيكون $v'$ تشاكلا من $S$ إلى $R/J$. تحوي صورة $v'$ كل المجموعات المشاركة $s + J$ حيث $s \in S$؛ أي أن $\operatorname{im} v' = S + J/J$ . تحوي نواة $v$ كل العناصر في $S$ التي يرسلها $v$ إلى الصفر؛ أي أن $\ker v' = S \cap J$ . لذلك $S \cap J \lhd J$ حسب (٢-٦) وكذلك $S + J/J \cong S/S \cap J$ حسب (٢-٩) .

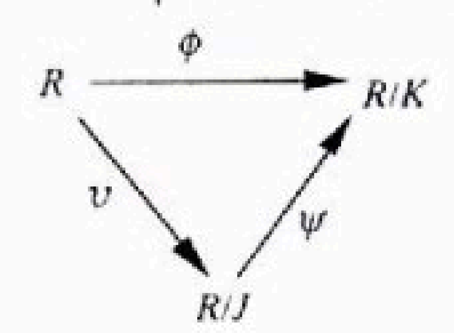
**(٢-١١) مبرهنة**

*إذا كانت $R$ حلقة وكان $J, K$ مثالين في الحلقة $R$ بحيث إن $J \subseteq R$ ، فإن $K/J \lhd R/J$ وكذلك:*

$$(R/J)/(K/J) \cong R/K$$

**البرهـــــان**

لنستخدم (٢-٨) معتبرين $\phi$ التشاكل الطبيعي من $R$ إلى $R/K$. عندئذ $\ker\phi = K$ ونحصل على تشاكل $\psi$ حيث إن الرسم التخطيطي التالي تبادلي




كذلك $\ker\psi = K/J$ . من الواضح أن $\psi$ غامر، وهكذا باستخدام المبرهنة الأولى في التماثل، نحصل على النتيجة المطلوبة .

توجد «مبرهنة تماثل» أخرى تختص بالعلاقة بين المثاليات في $\text{im}\phi$، والحلقات الجزئية في $\text{im}\phi$، . . . إلخ (حيث $\phi$ تشاكل من حلقة $R$) من جهة والأشياء المناظرة لها في $R$ من جهة ثانية. نحتاج أن نتذكر بعض المعلومات في نظرية المجموعات قبل أن نذكر هذه المبرهنة .

نفرض أن $X'', Y''$ مجموعتان وأن $f : X'' \to Y''$ تطبيق وكذلك نفرض أن $X, Y$ مجموعتان جزئيتان من $X'', Y''$ على التوالي .

نعرف

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X'' : f(x) \in Y\}$$

تسمى المجموعتان $f(X)$ و $f^{-1}(Y)$ صورة (image) $X$، *والصورة العكسية* (*inverse image*) لـ$Y$ على التوالي . نحصل بهذه الطريقة على تطبيق من المجموعة $\mathscr{P}(X'')$ (مجموعة المجموعات الجزئية لـ$X''$) إلى المجموعة $\mathscr{P}(Y'')$.. لا زال هذا التطبيق يحمل الرمز $f$، بالرغم من أنه من المفروض أن يعطى رمزا مختلفا . بالمثل يوجد تطبيق $f^{-1} : \mathscr{P}(Y'') \to \mathscr{P}(X'')$ . يمكن التحقق بسهولة من صحة النتائج التالية :

(i) إذا كانت $Y \subseteq \text{im}f$ ، فإن $Y = f(f^{-1}(Y))$

(ii) إذا كانت $X, X'$ مجموعتين جزئيتين من $X''$ وكانت $Y, Y'$ مجموعتين جزئيتين من $Y''$، فإن:

$$X \subseteq X' \Rightarrow f(X) \subseteq f(X'), Y \subseteq Y' \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$$

نستطيع الآن أن نتطرق إلى المبرهنة الأخيرة في التماثل وهي كما يلي.

**(٢-١٢) مبرهنة**

*نفرض أن $R, S$ حلقتان، ونفرض أن $\phi : R \to S$ تشاكل نواته $K$. يشيِّد التطبيقان $\phi$ و $\phi^{-1}$ المذكوران آنفا تقابلا يحافظ على الاحتواء بين مجموعة الحلقات الجزئية من $\mathrm{im}\phi$ ومجموعة الحلقات الجزئية من $R$ التي تحوي $K$. في هذا التقابل المثاليات تناظر المثاليات.*

**البرهـــــان**

نفرض أن $T = \mathrm{im}\phi$، وأن $U$ حلقة جزئية من $T$. نود أن نُثبت أن $\phi^{-1}(U)$ حلقة جزئية من $R$ تحوي $K$. نلاحظ أن $0 \in U$ ولذلك $\phi^{-1}(U) \geq \phi^{-1}(\{0\}) = \mathrm{K}$ (حسب (ii)). نفرض أن $r, r' \in \phi^{-1}(U)$ وبالتالي فإن $\phi(r), \phi(r') \in U$ وهكذا فإن $\phi(r + r') = \phi(r) + \phi(r') \in U$ لأن $U$ حلقة جزئية. ويؤدي هذا إلى أن $r + r' \in \phi^{-1}(U)$. وبالمثل يمكن إثبات أن $r -$ و $rr'$ ينتميان إلى $\phi^{-1}(U)$، وهكذا فإن $\phi^{-1}(U)$ حلقة جزئية من $R$. باستخدام (i) نستنتج أن $U = \phi(\phi^{-1}(U))$.

نفرض أن $V$ حلقة جزئية من $R$ تحوي $K$. سنثبت أن $\phi(V)$ حلقة جزئية من $T$، وأن $V = \phi^{-1}\ \phi(V)$. ونكون بذلك قد أثبتنا أن التناظر الذي عمل بواسطة $\phi$ و $\phi^{-1}$ بين الحلقات الجزئية لـ $T = \mathrm{im}\phi$ والحلقات الجزئية لـ $R$ التي تحوي $K$، هو تقابل. نلاحظ أن $\phi(V)$ صورة تشاكل معين لـ $V$ وهو اقتصار $\phi$ على $V$؛ لذلك فإن $\phi(V)$ هي حلقة جزئية من $T$ حسب مأخوذة (٢-٦). نفرض أن $r \in \phi^{-1}(\phi(V))$. هذا يعني أن $\phi(r) \in \phi(V)$، وبالتالي $\phi(r) = \phi(v)$ حيث $v \in V$. إذن $\phi(r - v) = 0$ وبالتالي $r - v \in K$؛ أي أن $r = v + k$ حيث $k \in K$. ولكن $K \subseteq V$ حسب الفرض، إذن $r \in V$ و $k \in V$ وهذا يؤدي إلى أن $\phi^{-1}(\phi(V)) \subseteq V$. الاحتواء العكسي واضح، إذن $V = \phi^{-1}(\phi(V))$.

نلاحظ أن الحقيقة التي تشير إلى أن التقابل يحافظ على الاحتواء هي بالضبط الشرط (ii) المذكور آنفا. نترك للقارئ أن يتأكد من أن المثاليات تقابل المثاليات.

من المفيد أن نشير إلى خواص التناظر المذكور سابقا حينما يكون $\phi$ هو التشاكل الطبيعي $\upsilon$ من الحلقة R إلى حلقة القسمة $R/K$. في هذه الحالة، كل حلقة جزئية من $\operatorname{im}\upsilon = R/K$ مجموعة معينة من مجموعات مشاركة لـ $K$ و $\upsilon^{-1}$ تُنشئ اتحاد هذه المجموعات المشاركة. ومن ناحية أخرى، كل حلقة جزئية من $R$ تحوي $K$، هي اتحاد مجموعات مشاركة لـ $K$ وتستبدلها $\upsilon$ بمجموعة هذه المجموعات المشاركة. وكل حلقة جزئية من $R/K$ صورة تحت تأثير $\upsilon$ لحلقة جزئية $V$ من $R$ تحوي $K$، ولذلك هي على الصورة $V/K$. بالمثل، مثاليات الحلقة $R/K$ نحصل عليها من مثاليات $V$ للحلقة $R$ والتي تحوي $K$.

## ٣- بعض خواص الحلقات الجزئية والمثاليات

**(٢-٣-١٣) مأخوذة**

(i) *نفرض أن* $\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *أية مجموعة حلقات جزئية (مثاليات على التوالي) في حلقة* $R$*، فتكون* $T = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ *حلقة جزئية (مثاليا على التوالي) في الحلقة* $R$.

(ii) نفرض أن

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$$

*سلسلة تصاعدية (ascending chain) من حلقات جزئية (مثاليات على التوالي) في الحلقة* $R$*، فتكون* $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ *حلقة جزئية (مثاليا على التوالي) في الحلقة* $R$.

**البرهـــــان**

(i) لما كان $0 \in S_\lambda$ لكل $\lambda \in \Lambda$، فإن $0 \in T$، لذلك فإن $T$ مجموعة غير خالية. نفرض أن $a, b \in T$، فيكون $a, b \in S_\lambda$ لكل $\lambda \in \Lambda$. وإذن $a - b\,, ab \in S_\lambda$ لكل $\lambda \in \Lambda$، وبالتالي $a - b, a\,b \in T$، وعليه فإن $T$ تشكل حلقة جزئية. نلاحظ بالإضافة إلى ذلك، أنه إذا كان كل $S_\lambda$ مثاليا في الحلقة $R$ وكان $x \in R$،

فإن $xa$ و $ax$ ينتميان إلى كل $S_\lambda$ وبالتالي ينتميان إلى $T$. إذن تشكل $T$ في هذه الحالة مثاليا في الحلقة $R$.

(ii) من الواضح أن $0 \in S$. نفرض أن $a, b \in S$ فيكون $a \in S_i$ , $b \in S_j$ لرقمين $i, j$. إحدى الحلقتين الجزئيتين $S_i, S_j$ تحوي الأخرى؛ وبذلك يمكننا أن نختار $l \; (= \max\{i, j\})$ بحيث إن $a, b \in S_l$. وعليه فإن $a - b, ab \in S_l$ وبالتالي $a - b, ab \in S$. ويؤدي هذا إلى أن $S$ حلقة جزئية. سنترك للقارئ الحالة التي تكون فيها $S_i$ مثاليات.

تسمح لنا المأخوذة (٢-١٣) بتعريف الحلقة الجزئية أو المثالي المولد (generated by) بمجموعة معطاة من العناصر، لأنه إذا كانت $X$ مجموعة جزئية من $R$، فإن تقاطع كل الحلقات الجزئية من $R$ التي تحوي $X$ تشكل حلقة جزئية من $R$ تحوي $X$ أيضا، وهي الصغرى من بين الحلقات الجزئية من $R$ التي تحوي $X$. تطبق ملاحظات مماثلة على المثاليات.

### (٢-١٤) تعريف

*الحلقة الجزئية المولدة بمجموعة جزئية $X$ من $R$ هي الحلقة الجزئية الصغرى في $R$ التي تحوي $X$. والمثالي المولد بمجموعة جزئية $X$ هو المثالي الأصغر في $R$ الذي يحوي $X$.*

قد يكون من المفيد أن نعطي وصفا داخليا للحلقة الجزئية أو المثالي المولد بمجموعة معطاة ولتكن $X$؛ أي الوصف الذي يوضح كيف تبنى عناصر الحلقة الجزئية أو المثالي من عناصر المجموعة $X$. سنعطي الآن هذا الوصف.

### (٢-١٥) مأخوذة

*إذا كانت $X$ مجموعة جزئية من حلقة $R$، فإن:*

(i) *الحلقة الجزئية من $R$ المولدة بواسطة $X$ تحوي كل المجاميع المنتهية للعناصر $\pm x_1 x_2 \dots x_n$، حيث $x_i \in X$، $n = 1, 2, \dots$.*

(ii) *إذا كانت $R$ حلقة إبدالية بمحايد، وكانت $X \neq \phi$، فإن المثالي المولد بواسطة $X$ هو $RX$.*

**البرهـــان**

(i) نفرض أن $S$ هي الحلقة الجزئية من $R$ المولدة بـ $X$ . ولما كانت $S$ حلقة جزئية من $R$ تحوي $X$، فإن $S$ تحوي كل حواصل الضرب المنتهية لعناصر $X$؛ وبذلك تحوي المجموعة $\overline{S}$ التي عناصرها كل المجاميع المنتهية للعناصر من الصيغة:

$\pm x_1 x_2 \ldots x_n$ حيث $x_i \in X$ و $n = 1, 2, \ldots$

ومن ناحية أخرى، لما كانت $\overline{S}$ تحوي 0 (لأننا نعتبر الصفر حاصل جمع حدود عددها صفر)، فإنه من الواضح أنها حلقة جزئية من $R$ تحوي $X$. لما كانت $S$ الحلقة الجزئية الصغرى من هذا النوع فإن $S \subseteq \overline{S}$ وهكذا فإن هاتين المجموعتين متساويتان.

(ii) نفرض أن $R$ إبدالية بمحايد . نتذكر أن $RX$ ترمز للمجموعة التي تحوي كل العناصر من الصيغة:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \, x_i \quad \text{لكل} \quad r_i \in R \ \text{ولكل} \ x_i \in X, \ n \geq 1$$

إذا كان $\overline{X}$ يرمز للمثالي في الحلقة $R$ المولد بـ $X$، فإن كل عنصر $r_i x_i$ ينتمي إلى $\overline{X}$ ولذلك $RX \subseteq \overline{X}$. من ناحية أخرى، فإن $RX$ مثالي في $R$ لأن $RX$ تشكل زمرة جمعية جزئية من $R$ حسب (٢-٣)، وأيضا $R(RX) = (RR)X \subseteq RX$، لكن $R$ حلقة إبدالية، إذن $RX \lhd R$ . كما يلاحظ أن $RX$ تحوي $X$، لإنه إذا كان $x \in X$، فإن $x = 1x \in RX$، حقيقة وجود المحايد في $R$ حقيقة مهمة هنا. من تعريف $\overline{X}$ نستنتج أن $\overline{X} \subseteq RX$، وعليه فإن هاتين المجموعتين متساويتان.

نلاحظ أن وصف المثالي المولد بـ $X$ يكون أكثر تعقيدا في حالات أكثر تعميما (تمرين ١١) ولن نعالجه هنا إذ إن اهتمامنا يتركز على الحلقات الإبدالية بمحايد .

لقد سبق أن عرفنا مجموع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من حلقة، ويمكن تعميم هذا التعريف إلى عدد منته من المجموعات الجزئية كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + \cdots + S_n = \{s_1 + \ldots + s_n : s_i \in S_i\}$$

وبالتالي سنحصل على:

**(٢-١٦) مأخوذة**

*إذا كانت $J_1, \dots, J_n$ مثاليات في الحلقة $R$، فإن $J = \sum_{i=1}^{n} J_i$ مثالي في الحلقة $R$.*

**البرهـــان**

من الواضح (انظر المأخوذة (٢-٣)) أن J تشكل زمرة جزئية جمعية من $R$. إذا كان $j \in J$، فإن $j = \sum_{i=1}^{n} j_i$ حيث $j_i \in J_i$. ليكن $r \in R$، يلاحظ أن $rj = \Sigma r j_i \in J$ وبالمثل $jr \in J$. وإذن $J$ يشكل مثاليا في $R$.

سنختم هذا الفصل بوصف الحلقات الجزئية والمثاليـات في الحلقة $\mathbb{Z}$. يعتبر تقديم وصف دقيق للحلقات الجزئية لحلقة معطاة إنجازا غير عادي، ولكن يمكن عمل ذلك في حالة $\mathbb{Z}$ بدون صعوبة كبيرة. سنحتاج إلى خاصة أساسية ومألوفة لـ $\mathbb{Z}$ تسـمى خاصـة القسمـة الإقليدية (Euclidean division property) وهي كما يلي:

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ وكان $b \neq 0$، فإنه يوجد عددان صحيحان $r$ و $q$ بحيث إن

$$a = bq + r \quad , \quad 0 \leq r < |b|$$

هذه النتيجة جزء من دراستنا في المراحل الأولى، وتكمن الصعوبة في تقديم برهان لها في أن نقرر من أين نبدأ؟ سنكتفي بالرسم التخطيطي التالي وننصح القارئ غير المقتنع بالرجوع إلى كتب أخرى، أنظر مثلا مبرهنة (١٢) صفحة ٤٩ في المرجع [Maclane *et al*, 1967].

0 b 2b ... qb a (q+1)b
r

**(٢-١٧) مأخوذة**

*الحلقات الجزئية من $\mathbb{Z}$ هي بالضبط الحلقات الجزئية $n\mathbb{Z} = \{na : a \in \mathbb{Z}\}$ حيث $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.*

**البرهـــان**

من الواضح أن كلا من المجموعات الجزئية $n\mathbb{Z}$ يشكل حلقة جزئية من $\mathbb{Z}$. نفرض أن $S$ أية حلقة جزئية من $\mathbb{Z}$. إذا كانت $S$ هي الحلقة الصفرية فإن $S = 0\mathbb{Z}$. نفرض أن $S$ ليست الحلقة الصفرية، وبالتالي فهي تحوي عنصرا غير صفري $s$. لما كانت $S$ حلقة جزئية فإن $-s \in S$. وحيث إنه إما $s$ أو $-s$ عدد صحيح موجب، فإن $S$ تحوي بعض الأعداد الصحيحة الموجبة. تحوي أية مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة عددا أصغر، وهذه خاصة أساسية أخرى من خصائص $\mathbb{Z}$. نفرض أن $n$ أصغر عدد صحيح موجب ينتمي إلى $S$. لما كانت $S$ حلقة جزئية، فهي تحوي بالإضافة إلى $n$ العنصر $na = \pm(n+...+n)$ الذي له $|a|$ حدا، حيث $a \in \mathbb{Z}$، وبالتالي $n\mathbb{Z} \subseteq S$. من ناحية أخرى، إذا كان s عنصرا اختياريا في $S$، فإننا باستخدام خاصة خوارزمية القسمة في $\mathbb{Z}$ نستطيع كتابة $s = nq + r$ حيث $q, r \in \mathbb{Z}$، $0 \le r < n$، ويؤدي هذا إلى أن $r = s - nq \in S + n\mathbb{Z} \subseteq S$. إذن إما $r = 0$ أو أن $S$ تحوي عددا صحيحا موجبا أصغر من $n$، وحيث إن الاحتمال الثاني يناقض اختيار n، إذن $r = 0$ وبالتالي $s = nq \in n\mathbb{Z}$، وعليه فإن $S \subseteq n\mathbb{Z}$. إذن $S = n\mathbb{Z}$.

من الواضح أن $n\mathbb{Z}$ يشكل مثاليا في $\mathbb{Z}$ وهو مثالي مولد بـ $n$. لذلك فإن أية حلقة جزئية في $\mathbb{Z}$ تشكل مثاليا وهذه حالـة غيـر عاديـة (انظر تمرين ١٠). نلاحظ أن حلقة القسمة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ هي الحلقة $\mathbb{Z}_n$ لفصول الرواسب قياس $n$ التي أشير إليها بدقة أقل في مثال حلقة (٢). وعناصر هذه الحلقة هي المجموعات المشاركة $n\mathbb{Z} + m$، حيث $m$ يمر على كل عناصر $\mathbb{Z}$. إذا كان $n > 0$ فإنه يمكن كتابة $m$ على الصـورة $qn + r$؛ حيث $0 \le r < n$، وبالتالي $n\mathbb{Z} + m = n\mathbb{Z} + r$. لذلك، إذا كان $n > 0$، فإنه يوجد عدد منته من المجموعات المشاركة المختلفة وهي:

$$n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} + 0,\ n\mathbb{Z} + 1, ..., n\mathbb{Z} + (n-1)$$

وغالبا ما تكتب بالشكل التالي:

$$[0],\ [1],\ [2], ..., [n-1]$$

يمكن التعبير عن العمليات في $\mathbb{Z}_n$ كما يلي:

$$[i] + [j] = [i + j],\ [i][j] = [ij],\ -[i] = [-i]$$

باستخدام خاصة خوارزمية القسمة، نستطيع أن نعبّر عن $[i+j]$، . . . الخ بواسطة أحد عناصر القائمة:

$$[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$$

بإضافة أو طرح مضاعف مناسب للعدد $n$ .

## تمارين على الفصل الثاني

١ - إذا كانت $R$ حلقة بمحايد، وكان $J$ مثاليا في $R$ يحوي المحايد، فأثبت أن $J = R$ .

٢ - اكتب الحلقات الجزئية والمثاليات للحلقة $P(X)$ (مثال حلقة ٦) في الحالات التي تحوي $X$ عنصرين أو ثلاثة عناصر .

٣ - نفرض أن $X, Y, Z$ مجموعات جزئية غير خالية من حلقة $R$. أثبت أن $X(Y+Z) \subseteq XY + XZ$، وأن المساواة تحصل عندما تحوي كل من $Y, Z$ الصفر . أعط مثالا لثلاث مجموعات جزئية من $\mathbb{Z}$ لا تحقق المساواة في حالتها .

٤ - وضح أن اتحاد حلقتين جزئيتين من حلقة قد لا يكون حلقة جزئية . أثبت أنه إذا كانت $S, S'$ حلقتين جزئيتين من حلقة ما، فإن $S \cup S'$ تكون حلقة جزئية إذا وفقط إذا كان $S \subseteq S'$ أو $S' \subseteq S$ .

٥ - أثبت أن الحقل K له مثاليان فقط . وبشكل أعم أثبت نفس الشيء في الحلقة $M_n(K)$ .

٦ - نفرض أن $T_n(K)$ مجموعة كل المصفوفات من النوع $n \times n$ على الحقل $K$ التي تكون عناصرها تحت القطر أصفارا، وأن $\overline{T}_n(K)$ المجموعة الجزئية من $T_n(K)$ التي تكون فيها عناصر القطر أصفارا، وأن $D_n(K)$ مجموعة كل المصفوفات القطرية من النوع $n \times n$ على الحقل $K$. أثبت أن كلا من هذه المجموعات يشكل حلقة بالنسبة لعمليتي جمع المصفوفات وضربها وأثبت أن $\overline{T}_n(K) \lhd T_n(K)$ ، وأن $T_n(K)/\overline{T}_n(K) \cong D_n(K)$ . (**إرشاد:** كون تشاكلا غامرا من $T_n(K)$ إلى $D_n(K)$ بحيث تكون نواته $\overline{T}_n(K)$ ) .

٧ - أعط مثالا يوضح أن العلاقة "$\lhd$" بين الحلقات الجزئية لحلقة، ليست متعدية ((**إرشاد:** اعتبر الحلقة $T_2(\mathbb{Q})$ المعرفة في المثال السابق) .

٨ - أثبت أن أي تشاكل حلقات $\phi$ يمكن التعبير عنه بالصيغة $\phi = \mu\varepsilon$، حيث $\varepsilon$ تشاكل غامر و $\mu$ تشاكل متباين .

٩ - إذا كان $\phi$ تشاكلا من حلقة تامة $R$ إلى حلقة تامة $S$، فأثبت أنه إما $\phi(R) = \{0_s\}$ أو $\phi(1_R) = 1_s$ .

١٠ - إذا كانت $R$ حلقة بمحايد بحيث تكون فيها أية حلقة جزئية مثاليا فأثبت، باعتبار الحلقة الجزئية المولدة بـ 1، أنه إما $R = \{0\}$ أو $R \cong \mathbb{Z}$ أو $R \cong \mathbb{Z}_n$ . أعط مثالا لحلقة بدون محايد، تكون فيها كل حلقة جزئية مثاليا .

١١ - افرض أن $R$ حلقة، وأن $X$ مجموعة جزئية فيها . صف المثالي في $R$ المولد بـ $X$:

(أ) إذا كانت $R$ بمحايد

(ب) إذا كانت $R$ إبدالية بدون محايد .

(جـ) بشكل عام .

١٢ - افرض أن $R$ حلقة إبدالية بمحايد . أثبت أن $R$ حقل إذا وفقط إذا كان يوجد في $R$ مثاليان فقط . يقال عن مثالي $M$ لحلقة $R$ إنه مثالي أعظمي (maximal ideal) إذا لم يوجد مثالي $J$ يحقق $M \subset J \subset R$ . استنتج من المبرهنة (٢-١٢) أن $M$ مثالي أعظمي في $R$ إذا وفقط إذا كان $R/M$ حقلا .

١٣* - استخدم مأخوذة زورن (Zorn's Lemma) (انظر مثلا صفحة ٣٣ بالمرجع [Kelley, 1955] إذا كنت لم تطّلع سابقا على هذه المأخوذة) في إثبات أنه يوجد مثالي أعظمي في كل حلقة إبدالية غير صفرية وبمحايد، واستنتج أنه يوجد تشاكل غامر من هذه الحلقة إلى حقل .

١٤* - أثبت التعميم التالي للتمرين ١٢ : إذا كانت $R$ حلقة إبدالية تحقق $R^2 \neq \{0\}$ ولها بالضبط مثاليان فإن $R$ حقل . عمم باقي التمرين أيضا .

# الفصل الثالث

# بناء حلقات جديدة

لقد لاحظنا في الفصل السابق، كيفية بناء حلقات جديدة من حلقات معطاة بتكوين حلقات جزئية وحلقات القسمة. في هذا الفصل سنناقش ثلاث بنى مهمة – حلقة المجموع المباشر لحلقات، حلقة كثيرات الحدود وحلقة المصفوفات. مثل هذه البنى مهمة لعدة أسباب: أولها إنها ستضيف أمثلة إلى محفظة أمثلتنا الملموسة، وسيكون ذلك مفيدا في إعطاء نظرة فاحصة إلى مبرهنات معروفة، كما يساعد في تجربة مدى صحة بعض النتائج المتوقعة. وثانيها إنه من الممكن في بعض الأحيان إثبات أن بعض الصفات الجبرية يمكن أن ترثها الحلقة من مركباتها التي استخدمت في بنائها، وبالتالي تعميم مبرهنة ما إلى فصل أكبر من الحلقات. وثالثها إنه من الممكن إثبات مبرهنات تنص على أن حلقات معينة نرغب في دراستها يمكن بناؤها اعتمادا على حلقات معروفة لدينا.

## ١– المجموع المباشر

نفرض أن $R_1, \ldots, R_n$ جماعة منتهية من الحلقات. نفرض أن $R$ هي الجداء الديكارتي (cartesian product) للمجموعات $R_i$ ونعرف العمليات على $R$ بواسطة المركبات كما يلي:

$$(r_1, \ldots, r_n) + (s_1, \ldots, s_n) = (r_1 + s_1, \ldots, r_n + s_n)$$

$$-(r_1, \ldots, r_n) = (-r_1, \ldots, -r_n)$$

$$(r_1, ..., r_n)\,(s_1, ..., s_n) = (r_1 s_1, ..., r_n s_n)$$

يمكن بسهولة إثبات أن هذه العمليات تجعل $R$ حلقة ويكون $(0, ..., 0)$ هو صفرها . كما نلاحظ أن الإسقاطات الإحداثية (coordinate projections)

$$\pi_i\,(r_1, ..., r_n) \to r_i$$

هي تشاكلات غامرة من الحلقة $R$ إلى الحلقات $R_i$ . ونعرّف هذا المجموع المباشر عندما $n = 0$ بأنه الحلقة الصفرية $\{0\}$ ، لأن هذا التأويل سيكون ملائما أحيانا .

**(٣-١) تعريف**

*الحلقة $R$ المعرفة أعلاه هي المجموع المباشر الخارجي* (external direct sum) *للحلقات $R_1, ..., R_n$ ويرمز لها بالرمز*

$$R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$$

**ملاحظة**

يوجد غموض معين في التعريف المعطى . لنفرض أن $s_1$ و $r_1$ لا ينتميان فقط إلى $R_1$ بل إلى $R_2$ أيضا . إن الرمز $r + s$ غامض ، حيث لا يعرف الجمع هل هو الجمع في $R_1$ أو الجمع في $R_2$ . وحتى نكون أكثر دقة ، يجب أن نوضح العمليات في كل $R_i$ بشكل محدد ونكتب $r_i +_i s_i$ أو ما شابهه . ومع ذلك ، نشير إلى أنه من غير المحتمل أن تسبب هذه النقطة غموضا ولذلك لن نتابع نقاشها أكثر .

من المفيد أن ندرس المجموع المباشر الخارجي بشكل أكثر دقة . نفرض أن $J_i$ مجموعة كل العناصر $(0, ..., 0, r_i, 0, ..., 0)$ من $R$ لكل $i = 1, ..., n$ ؛ أي مجموعة عناصر $R$ التي تكون كل مركباتها أصفارا ما عدا المركبة التي رقمها i التي من المحتمل ألا تساوي صفرا . يستطيع القارئ - بسهولة - أن يثبت أن $J_i$ تشكل مثاليا في الحلقة $R$ ، ويعطينا اقتصار الإسقاط الإحداثي $\pi_i$ على $J_i$ تماثلا بين $J_i$ و $R_i$ (يلاحظ أن $R_i$ لا تشكل حلقة جزئية من $R$ إلا إذا كان $n = 1$) . كذلك $\sum_{i=1}^{n} J_i = R$ ، ولما كان $\sum_{j \neq i} J_j$

يتكون من كل عناصر $R$ التي مركبتها رقم i تساوي صفرا فإن $J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$ .

هذه الحقائق تؤدي إلى تقديم التعريف التالي :

**(٣-٢) تعريف**

*إذا كانت $R$ حلقة وكانت $J_1, ..., J_n$ مثاليات في الحلقة بحيث إن*

$$R = \sum_{i=1}^{n} J_i \qquad \text{(i)}$$

$$J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\} \text{ لكل } i = 1, ..., n \qquad \text{(ii)}$$

فإن $R$ تسمى المجموع المباشر الداخلي (internal direct sum) للمثاليات $J_i$ ونكتبها بنفس طريقة كتابة المجموع المباشر الخارجي ، $R = J_1 \oplus ... \oplus J_n$ وعندما $n = 0$ فإننا نُؤوِّل التعريف بقولنا إن الحلقة الصفرية $\{0\}$ هي المجموع المباشر الداخلي لمجموعة خالية من المثاليات .

سيتضح سبب استخدام رمز المجموع المباشر الخارجي للتعبير عن المجموع المباشر الداخلي بعد المأخوذة التالية . يمكن أن ينظر إلى المجموع المباشر الخارجي على أنه بناء حلقة أكثر تعقيدا من حلقات معطاة بينما المجموع المباشر الداخلي هو تهشيم الحلقة المعطاة إلى مركبات أبسط .

**(٣-٣) مأخوذة**

*إذا كانت $R$ هي المجموع المباشر الداخلي لمثالياتها $J_1, J_2, ..., J_n$ فإن لكل عنصر $r$ في $R$ تمثيل وحيد على الصورة التالية :*

$$r = r_1 + r_2 + ... + r_n$$

*حيث $r_i \in J_i$ والعمليات على $R$ هي عمليات على المركبات بالنسبة لهذا التمثيل .*

**البرهـــان**

لما كان $R = \Sigma J_i$، فإن كل عنصر في $R$ له على الأقل تمثيل واحد على الشكل المعطى في منطوق المأخوذة. لنفرض أن له تمثيلين:

$$r_1 + \cdots + r_n = r_1' + \cdots + r_n'$$

حيث $r_i,\ r_i' \in J_i$، وبالتالي فإن:

$$r_i - r_i' = \sum_{j \neq i} \left( r_j' - r_j \right) \in J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$$

لذلك فإن $r_i = r_i'$، وبالتالي فإن التمثيل وحيد.

نلاحظ أنه كنتيجة لفروض الحلقة نحصل على:

$$(r_1 + \ldots + r_n) + (s_1 + \ldots + s_n) = (r_1 + s_1) + \ldots + (r_n + s_n)$$

$$-(r_1 + \ldots + r_n) = (-r_1) + \ldots + (-r_n)$$

حيث $r_i, s_i \in J_i$. لما كان كل $J_i$ مثاليا فإنه حسب الشرط (ii) من تعريف المجموع المباشر الداخلي:

$$J_i J_j \subseteq J_i \cap J_j = \{0\} \quad \text{لكل } i \neq j$$

إذن:

$$r_i s_j = 0 \quad \text{إذا كان } i \neq j$$

وبالتالي

$$(r_1 + \ldots + r_n)(s_1 + \ldots + s_n) = r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n$$

باستخدام نفس رموز منطوق المأخوذة (٣-٣) يلاحظ أن التطبيق $\pi_i : r \to r_i$ حسن التعريف من $R$ إلى $J_i$. يسمى $\pi_i$ الإسقاط من $R$ على $J_i$ المرتبط بالتفريق $R = J_1 \oplus \ldots \oplus J_n$ ولأن العمليات على $R$ هي عمليات على المركبات فإنه يمكن بسهولة ملاحظة أن $\pi_i$ تشاكل غامر.

يلاحظ أن العلاقة بين المجموع المباشر الداخلي والمجموع المباشر الخارجي أصبحت الآن واضحة، حيث لاحظنا أن المجموع المباشر الخارجي لمجموعة من الحلقات $R_1, \ldots, R_n$ هو المجموع المباشر الداخلي لمثاليات $J_i \cong R_i$. من ناحية أخرى، إذا كانت $R$ المجموع المباشر الداخلي لمثاليات $J_1, \ldots, J_n$، فهي تماثل المجموع المباشر

الخارجي لـ $J_i$. في الحقيقة التطبيق $\phi : r \to (r_1, ..., r_n)$، حيث $r_i$ هو العنصر في $J_i$ في التعبير الوحيد لـ $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$، يعرِّف تماثلا لـ $R$ مع المجموع المباشر الخارجي لـ $J_i$.

فالاختلاف الأساسي بين المجموع المباشر الداخلي والمجموع المباشر الخارجي هو اختلاف مجموعات، ولذلك استخدم الرمز للتعبير عنهما.

**مثـــــال**

$$\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

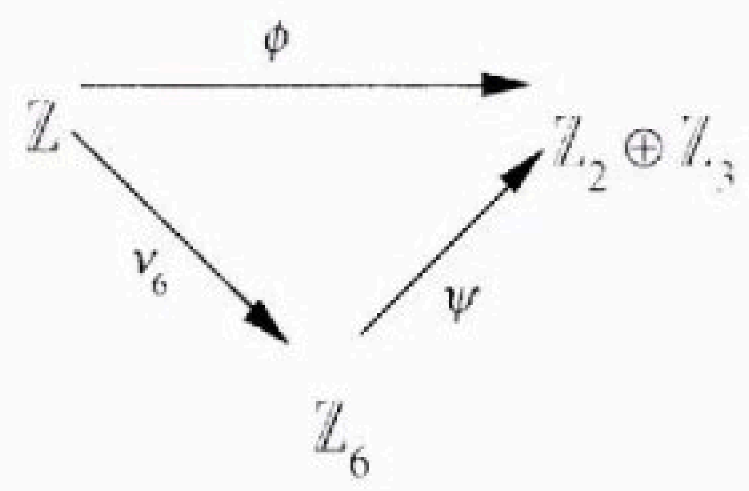
نفرض أن $\nu_2$ و $\nu_3$ هما التشاكلان الطبيعيان من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ وإلى $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ على التوالي ولنعتبر التطبيق:

$\phi : n \to (\nu_2(n)\ ,\ \nu_3(n))$ من $\mathbb{Z}$ إلى المجموع المباشر الخارجي $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. يمكن التأكد بسهولة من كون $\phi$ تشاكلا ونترك ذلك للقارئ. يكون $n$ عنصرا في النواة إذا وفقط إذا كان $(\nu_2(n)\ ,\ \nu_3(n)) = (0, 0)$؛ أي إذا وفقط إذا كان $\nu_2(n) = 0,\ \nu_3(n) = 0$ وعليه فإن:

$$\ker\phi = \ker\nu_2 \cap \ker\nu_3 = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$$

إذن باستخدام (٢-٩) يكون: $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \text{im}\phi$. نلاحظ أن في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ستة عناصر وبالتالي $\text{im}\phi$ فيها ستة عناصر. بما أن عدد الأزواج $(a, b)$ هو 6 حيث $a \in \mathbb{Z}_2$ و $b \in \mathbb{Z}_3$ فإن $\text{im}\phi = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ وبالتالي $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

إذا رغبنا التعبير عن $\mathbb{Z}_6$ كمجموع مباشر داخلي $J_2 \oplus J_3$ لمثاليات تماثل $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ على التوالي فإننا نستطيع أن نعمل ذلك بالتفكير مليا فيما يجري هنا. باستخدام برهان (٢-٩) يكون لدينا التماثل $\psi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ الذي يجعل الرسم التخطيطي التالي إبداليا.



وإذن $\psi$ يكون في الواقع معطى بواسطة $\psi([a]) = (\nu_2(a), \nu_3(a))$ . الآن، $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ هو المجموع المباشر الداخلي $J_3' \oplus J_2'$ حيث يحوي $J_2'$ كل العناصر $(a, 0)$ ويحوي $J_3'$ كل العناصر $(0, b)$ . إذن باستخدام التماثل $\psi^{-1}$ يكون $\mathbb{Z}_6 = J_2 \oplus J_3$ حيث $J_i = \psi^{-1}(J_i')$ . لكن $\psi^{-1}(J_2')$ يناظر $\ker \nu_3$ , $\psi^{-1}(J_3')$ يناظر $\ker \nu_2$، وإذن

$$\psi^{-1}(J_3') = \{[0], [2], [4]\} \text{ و } \psi^{-1}(J_2') = \{[0], [3]\}$$

سيجد القارئ أنه من المفيد لو تحقق بصورة مباشرة من كون $\mathbb{Z}_6$ هي المجموع المباشر الداخلي لـ $J_2, J_3$ كما تم تعريفهما سابقا، وأنه يوجد تماثل بين $J_2, J_3$ و $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ على الترتيب. باستخدام نفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\mathbb{Z}_{rs} \cong \mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_s$$

إذا كان $r, s$ عددين صحيحين لا يوجد بينهما عوامل مشتركة سوى $\pm 1$ .

## ٢- حلقات كثيرات الحدود

قد لا تحظى هذه الفقرة بالاهتمام الكافي من القارئ لكون كثيرات الحدود من الموضوعات المألوفة لديه في دراسته السابقة، لذلك نود أن نشير إلى أن هناك نوعين متداولين من كثيرات الحدود ومرتبطين مع بعضهما. وقد يؤدي هذا الترابط إلى بعض الإرتباك الذي نود تحذير القارئ منه. سنعطي في هذا البند تعريفا دقيقا لحلقة كثيرات الحدود ونوضح كيف نسترجع من هذا التعريف الترميز العادي المستخدم في كثيرات الحدود. وبعد ذلك سندرس العلاقة بين حلقات كثيرات الحدود وحلقات مرتبطة بها تسمى حلقات دوال كثيرات الحدود آملين أن يزال أي ارتباك.

**(٣-٤) تعريف**

*لنفرض أن $R$ أية حلقة. حلقة كثيرات الحدود (polynomial ring) على $R$ هي مجموعة كل المتتاليات (المتتابعات):*

$$(r_0 , r_1 , \dots)$$

*حيث $r_i \in R$ التي يكون عدد منته فقط من حدودها لا يساوي صفرا. تعرّف عمليات الحلقة كما يلي:*

$$(r_0, r_1, \ldots) + (s_0, s_1, \ldots) = (r_0 + s_0, r_1 + s_1, \ldots)$$
$$-(r_0, r_1, \ldots) = (-r_0, -r_1, \ldots)$$
$$(r_0, r_1, \ldots)(s_0, s_1, \ldots) = (t_0, t_1, \ldots)$$

حيث $t_i = \sum_{j+k=i} r_j s_k$ . *يلاحظ أنه يظهر فقط عدد منته من الحدود في هذا المجموع لأنه بما أن* $j + k = i$ *فإن* $0 \le j,\ k \le i$ .

من الجدير بالذكر أن المتتاليات التي سبق الإشارة إليها هي تطبيقات من نوع معين من المجموعة $\{0, 1, 2, \ldots\}$ إلى $R$ . ومع ذلك نفضل أن نتجنب هذا الترميز الصحيح من الناحية الفنية خوفا من أن يخفي الحقيقة عن العين غير الثاقبة ونترك التعبير عن ذلك الترميز للمتضلعين في هذه الشكليات الرمزية .

**(٣-٥) مبرهنة**

*ينتج عن البناء المذكور أعلاه حلقة .*

**البرهـــان**

لنفرض بصورة مؤقتة أن $\bar{R}$ مجموعة المتتاليات المذكورة آنفا . سنثبت أولا أن «العمليات» المعرفة سابقا عمليات على $\bar{R}$ . نفرض أن $s = (s_0, s_1, \ldots), r = (r_0, r_1, \ldots)$ عنصران من $\bar{R}$ . نختار $m, n \ge 0$ بحيث إن $r_i = 0$ لكل $i > m$ و $s_j = 0$ لكل $j > n$ ونفرض أن $l = \max\{m, n\}$ ، وبالتالي فإن $r_i + s_i = 0$ لكل $i > l$ وإذن $r + s \in \bar{R}$ ، كذلك من الواضح أن $-r \in \bar{R}$ . أيضا :

$$(rs)_i = \sum_{j+k=i} r_j s_k$$

(حيث $(\ )_i$ ترمز إلى المركبة رقم $i$ للمتتالية المناسبة) . نفرض أن $i \ge m + n + 1$ . يلاحظ أنه إما $j > m$ أو $k > n$ في كل حد $r_j s_k$ حيث $j + k = i$ ، في الحالة الأولى $r_j = 0$ وفي الحالة الثانية $s_k = 0$ وإذن في كل حالة $r_j s_k = 0$ . وبالتالي فإن $(rs)_i = 0$ لكل $i \ge m + n + 1$ ويؤدي هذا إلى أن $rs \in \bar{R}$ .

يجب أن نثبت الآن أن شروط الحلقة متحققة . من الواضح أن عملية الجمع عملية تجميعية وإبدالية ، والمتتالية $(0, 0, ...)$ هي صفر الحلقة . كذلك :

$$r + (-r) = 0 \; (= (0, 0, ...))$$

لكل $r \in \overline{R}$ . لذلك فإن $\overline{R}$ زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الجمع . لكي نثبت أن $\overline{R}$ شبه زمرة ضربية يجب أن نثبت أن عملية الضرب عملية تجميعية . نفرض أن $r, s$ وكذلك $t = (t_0, t_1, ...)$ عناصر من $\overline{R}$ . إذن :

$$\big((rs)t\big)_n = \sum_{i+j=n} (rs)_i\, t_j = \sum_{i+j=n} \left( \sum_{k+l=i} r_k\, s_l \right) t_j$$

$$= \sum_{k+l+j=n} r_k\, s_l\, t_j$$

وذلك باستخدام قوانين التجميع والتوزيع في $R$ . كذلك

$$\big(r(st)\big)_n = \sum_{k+i=n} r_k (st)_i = \sum_{k+i=n} r_k \left( \sum_{l+j=i} s_l\, t_j \right)$$

$$= \sum_{k+l+j=n} r_k\, s_l\, t_j$$

وإذن $(rs)t = r(st)$ . سنترك إثبات قانوني التوزيع كتمرين . وهكذا فإن $\overline{R}$ تشكل حلقة .

لنقارن التعريف المعطى بالتعريف العادي لكثيرات الحدود . تعمل هذه المقارنة بطريقة أكثر مناسبة لو كانت $R$ بمحايد ، لذلك سنفترض هذه الحالة . يستطيع القارئ - بسهولة - أن يلاحظ أن التطبيق $r \to (r, 0, 0, ...)$ تشاكل متباين من $R$ إلى $\overline{R}$ وبالتالي فإن مجموعة كل المتتاليات $(r, 0, 0, ...)$ تشكل حلقة جزئية من $\overline{R}$ تماثل $R$ . ننظر إلى $R$ وكأنها حلقة جزئية من $\overline{R}$ بمطابقة كل عنصر $r \in R$ مع المتتالية $(r, 0, ...)$ . تحوي $\overline{R}$ العنصر $(0, 1, 0, ...)$ الذي سنسميه $x$ . يلاحظ من تعريف الضرب أن :

$$x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots) \;,\; x^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots)$$

وكذلك

$$n \geq 1 \text{ لكل } x^n = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, 1, 0, ...)$$

يلاحظ باستخدام تعاريف العمليات على $\overline{R}$ ما يلي :

$$(r_0, r_1, ..., r_n, 0, ...) = (r_0, 0, ...) (1, 0, ...) + (r_1, 0, ...) (0, 1, 0, ...) + ...$$

$$+ (r_n, 0, ...)(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, 1, 0, ... ) = r_0 + r_1 x + ... + r_n x^n$$

حسب المطابقة التي سبق أن أشير إليها . وهكذا فقد تم التعبير عن المتتاليات بصيغة مماثلة لكثيرات الحدود .

**ترمـيز**

نظرا إلى الملاحظات السابقة، سنرمز للحلقة $\overline{R}$ بالرمز $R[x]$، وتسمى حلقة كثيرات الحدود على $R$ بمتغير واحد $x$. تسمى عناصر $R$، التي طابقناها مع عناصر $R[x]$ بكثيرات الحدود الثابتة . سنعبر إبتداء من الآن عن كل كثيرة حدود بالصيغة :

$$r_0 + r_1 x + ... + r_n x^n$$

بدلا من صيغة المتتاليات التي قامت بدورها في بناء حلقة كثيرات الحدود وأوضحت أن كثيرات الحدود يمكن التفكير فيها كمتتاليات معاملاتها من حلقة بدلا من اعتبارها نوعا من الدوال . نستطيع في أوقات الحاجة الرجوع إلى استخدام المتتاليات للتعبير عن كثيرات الحدود .

**(٣-٦) تعريف**

*لتكن $R$ حلقة بمحايد . ونفرض أن :*

$$p = r_0 + r_1 x + ... + r_n x^n \in R[x]$$

*إذا كان $r_n \neq 0$ نقول إن درجة (degree) $p$ هي $n$ ونكتب $\partial(p) = n$ . هذا يرفق درجة بكل عنصر غير صفري في $R[x]$ . ستتفق حتى نكمل التعريف على أن $\partial(0) = -\infty$ . لذلك فإن $\partial$ هو تطبيق من $R[x]$ إلى $\{-\infty\} \cup \mathbb{Z}_{\geq 0}$ حيث* $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, ...\}$ . من المفيد أن نمنح الرمز $(-\infty)$ بعض الخواص بتعريف ما يلي :

$$n + (-\infty) = (-\infty) + n = -\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$$

$$(-\infty) < n$$

لكل $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

**(٣-٧) مأخوذة**

إذا كانت $p, q \in R[x]$ فإن

(i) $\partial(p+q) \leq \max\{\partial(p), \partial(q)\}$

(ii) $\partial(pq) \leq \partial(p) + \partial(q)$

(iii) في حالة كون $R$ حلقة تامة فإن

$$\partial(pq) = \partial(p) + \partial(q)$$

في هذه الحالة $R[x]$ تشكل حلقة تامة أيضا .

**البرهـــــان**

يمكن إثبات الحقائق أعلاه بسهولة عندما تكون واحدة من $p, q$ أو كلتاهما تساوي صفرا . لذلك سنفرض أن :

$$p = r_0 + r_1 x + \ldots + r_n x^n \qquad (r_n \neq 0)$$
$$q = s_0 + s_1 x + \ldots + s_m x^m \qquad (s_m \neq 0)$$

وهكذا فإن :

$$\partial(p) = n, \ \partial(q) = m$$

إذا كان $l = \max\{m, n\}$ فإن $p + q = \sum_{i=0}^{l} (r_i + s_i) x^i$ وبالتالي فإن $\partial(p+q) \leq l$

وهذا يثبت (i) . لكي نرى (ii) نفرض أن $t_i = \sum_{j+k=i} r_j s_k$ . كما في إثبات المبرهنة

(٣-٥) يكون $t_i = 0$ لكل $i > m + n$ وبالتالي $pq = \sum_{i=0}^{m+n} t_i x^i$ وعليه فإن :

$$\partial(pq) \leq \partial(p) + \partial(q)$$

أيضا $(pq)_{m+n} = r_n s_m$ . إذا كانت $R$ حلقة تامة يكون هذا العنصر غير صفري، وبالتالي $\partial(pq) = m + n$ في هذه الحالة . بوجه خاص $pq \neq 0$، كما أن الإبدال في $R[x]$ ينتج عن الإبدال في $R$ والمحايد 1 في $R$ هو نفسه محايد ضربي في $R[x]$، وعليه فإنه إذا كانت $R$ حلقة تامة فإن $R[x]$ حلقة تامة .

تسلك حلقة كثيرات الحدود $R[x]$ بشكل جيد عندما تكون الحلقة $R$ حقلا ولنسميه $K$ . حيث إن اهتمامنا سيتركز بشكل خاص على هذه الحالة فإننا سندرس خواص الحلقة $K[x]$ بشكل أكثر تفصيلا . الخاصة الأساسية للحلقة $K[x]$ هي الخاصة التالية التي تذكرنا بخاصة خوارزمية القسمة (Euclidean Division Property) للأعداد الصحيحة والتي سبق الإشارة إليها في نهاية الفصل الثاني . سنستخدم $K$ دائما للتعبير عن الحقل .

**(٣-٨) مأخوذة**

*لنفرض أن $a, b \in K[x]$ وأن $b \neq 0$، عندئذ توجد كثيرتا حدود وحيدتان $q, r \in K[x]$ بحيث إن :*

$$a = bq + r \ , \ \ \partial(r) < \partial(b)$$

**البرهـــــان**

سنثبت وجود $q, r$ باستخدام الاستقراء (induction) على $\partial(a)$ . سنلتزم بالتفصيل أكثر من العادة حتى تكون طريقة الإثبات واضحة . لكل $n = 0, 1, ...$ نفرض أن $P(n)$ تمثل التقرير الذي ينص على وجود $q, r$ عندما $\partial(a) < n$ . يلاحظ أن $P(0)$ يمثل التقرير الذي ينص على وجود $q, r$ عندما $a = 0$ ويمكن اعتبار $q = r = 0$ في هذه الحالة . سنفرض أن $P(n)$ صائب، ونثبت أن $P(n + 1)$ صائب . لذلك نفرض أن $a$ لها الصيغة :

$$a = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0)$$

و $b$ لها الصيغة :

$$b = b_0 + b_1 x + ... + b_l x^l \qquad (b_l \neq 0)$$

إذا كان $n < l$، نعتبر $q = 0,\ r = a$ . إذا كان $n \geq l$ نعتبر $a - a_n b_l^{-1} x^{n-l} b$ تساوي $c$ مثلا . لقد رتبنا الأمور بحيث إن معامل $x^n$ في $c$ يساوي صفرا وبالتالي $\partial(c) < n$ وإذن باستخدام $P(n)$ نستطيع كتابة :

$$c = bq_0 + r\ ,\ \partial(r) < \partial(b)$$

وبالتالي

$$a = b\left(q_0 + a_n b_l^{-1} x^{n-l}\right) + r$$

$$= bq + r\ ,\ \ \partial(r) < (b)$$

حيث $q = q_0 + a_n b_l^{-1} x^{n-1}$ وهكذا فقد تم إثبات وجود $q, r$ .

لكي نثبت الوحدانية، نفرض أن :

$$bq + r = bq' + r'\ ;\ \partial(r), \partial(r') < \partial(b)$$

وبالتالي فإن :

$$b(q - q') = r' - r$$

وينتج عن المأخوذة (٣-٧) أن

$$\partial(r' - r) \leq max\{\partial(r'), \partial(r)\} < \partial(b)$$

و

$$\partial(b(q - q')) = \partial(b) + \partial(q - q')$$

وهذا يؤدي إلى أن $\partial(b) + \partial(q - q') < \partial(b)$ ولكن ذلك لن يحدث إلا إذا كان $\partial(q - q') = -\infty$ لذلك $q - q' = 0$ وبالتالي $r' - r = 0$ .

**ترميز**

نفرض أن $c \in K$، ونفرض أن :

$$a = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x]$$

سنكتب $a(c)$ للدلالة على العنصر

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n$$

من $K$ . إذا كان $a(c) = 0$ فإننا نقول إن $c$ جذر (root) لـ $a$ . سنترك للقارئ، كتمرين إثبات أن، لعنصر ثابت $c \in K$، التطبيق $a \to a(c)$ يمثل تشاكل حلقات من $K[x]$ إلى

$K$ (في الحقيقة هو تشاكل غامر ، لأن كل عنصر من $K$ صورة لكثيرة حدود ثابتة) . ستسمح لنا هذه الحقيقة بالتعويض بعناصر $K$ متطابقات كثيرات الحدود كما سنرى ذلك فيما يلي .

**(٣-٩) مأخوذة (مبرهنة الباقي)**

*لنفرض أن $c \in K$ ولنأخذ $b$ المذكورة في المأخوذة (٣-٨) تساوي $(x - c)$ ، فيكون $r = a(c)$ .*

**البرهـــان**

لما كان $a = (x - c)q + r$ وحيث إن $\partial(r) < \partial(x - c) = 1$ فإن $r$ كثيرة حدود ثابتة . نعوض $x = c$ في المعادلة السابقة ، أو بشكل أكثر دقة ، نستخدم التشاكل $f \to f(c)$ . هذا يؤدي إلى أن :

$$a(c) = q(c)\,(c - c) + r = r$$

**(٣-١٠) نتيجة**

*إذا كانت $a \in K[x]$ ، وكان $c \in K$ و $c$ جذرا لـ $a$ ، فإن $(x - c)$ تقسم $a$ .*

**البرهـــان**

باستخدام المأخوذة (٣-٩) نحصل على :

$$a = (x - c)\,q + a(c)$$

$$= (x - c)\,q$$

لأن $a(c) = 0$ حسب الفرض .

**(٣-١١) مبرهنة**

*كثيرة الحدود $a \in K[x]$ التي تساوي درجتها $n \geq 0$ لها على الأكثر $n$ من الجذور المختلفة في $K$ .*

**البرهـــــان**

لتكن $c_1, c_2, \ldots, c_k$ جذورا مختلفة لـ $a$ في $K$. سنثبت باستخدام الاستقراء أن $(x - c_1) \ldots (x - c_k)$ تقسم $a$. نعلم من النتيجة السابقة أن $(x - c_1)$ تقسم $a$. نفرض أن $(x - c_1) \ldots (x - c_i)$ تقسم $a$ حيث $i < k$. وبالتالي فإن: $a = (x - c_1) \ldots (x - c_i)q$ حيث $q \in K[x]$. لما كان $c_{i+1}$ جذرا لـ $a$ فإن:

$$0 = a(c_{i+1}) = (c_{i+1} - c_1) \ldots (c_{i+1} - c_i)\, q(c_{i+1})$$

وإذن $q(c_{i+1}) = 0$، وعليه فإن $c_{i+1}$ جذر لـ $q$ وبالتالي فإن $x - c_{i+1}$ تقسم $q$ حسب النتيجة (٣-١٠) وهذا يؤدي إلى أن:

$$a = (x - c_1) \ldots (x - c_{i+1})\, q'$$

بهذه الطريقة نجد أن:

$$a = (x - c_1) \ldots (x - c_k)\, \overline{q}$$

ويكون $\partial(a) = k + \partial(\overline{q})$ ولما كان $a \neq 0$ فإن $\overline{q} \neq 0$ وبالتالي $n = \partial(a) \geq k$.

قد يكون الوقت مناسبا الآن لتدرس العلاقة بين كثيرات الحدود التي عرفناها ودوال كثيرات الحدود. لتكن $R$ حلقة إبدالية بمحايد. نستطيع كما في مثال حلقة (٨) أن نجعل المجموعة $R^R$ (مجموعة كل التطبيقات من $R$ إلى نفسها) حلقة باستخدام العمليات النقطية المعطاة كما يلي:

$$(f + g)(r) = f(r) + g(r)$$

$$(-f)(r) = -f(r)$$

$$(fg)(r) = f(r)\, g(r)$$

لكل $f, g \in R^R$ ولكل $r \in R$.

لتكن $a = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$. سنرفق مع كل $a$ تطبيقا $\theta(a) : R \to R$ بطريقة واضحة، أي أن:

$$\theta(a)(r) = a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n \quad ; \ (r \in R)$$

وبالتالي فإن $\theta$ تطبيق من $R[x]$ إلى $R^R$. يلاحظ أن $\theta$، بصفة عامة، ليس متباينا، حيث قد تحدد كثيرات حدود مختلفة نفس التطبيق من $R$ إلى نفسها. كمثال بسيط ليكن $R = \mathbb{Z}_p$ الحقل الذي يحوي $p$ عنصرا وحيث $p$ عدد أولي، ولنعتبر كثيرة الحدود $x^p - x$. المجموعة $\mathbb{Z}_p^*$، مجموعة كل العناصر غير الصفرية في $\mathbb{Z}_p$، هي زمرة ضربية

رتبتها $p-1$. وإذن كل عنصر $r \neq 0$ في $\mathbb{Z}_p$ يحقق المعادلة $r^{p-1} = 1$. وهكذا فإن $r^p - r = 0$ لكل $r \in \mathbb{Z}_p$ بما فيها $r = 0$. يعني هذا أن التطبيق الذي يناظر كثيرة الحدود $x^p - x$ هو التطبيق الصفري بالرغم من أن $x^p - x$ لا تمثل كثيرة الحدود الصفرية.

سنثبت الآن أن $\theta$ تشاكل حلقات من $R[x]$ إلى $R^R$. نفرض أن $a, b \in R[x]$. بالسماح لبعض المعاملات أن تكون صفرا نستطيع كتابة:

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , \ b = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

وبالتالي فإن:

$$a + b = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

وإذن لكل $r \in R$ يكون

$$\theta(a+b)(r) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) r^i = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i + \sum_{i=0}^{n} b_i r^i$$

$$= \theta(a)(r) + \theta(b)(r) = (\theta(a) + \theta(b))(r)$$

وذلك حسب تعريف الجمع في $R^R$. أيضا:

$$ab = \sum_{i=0}^{2n} \left( \sum_{j+k=i} a_j b_k \right) x^i$$

وبالتالي فإن:

$$\theta(ab)(r) = \sum_{i=0}^{2n} \left( \sum_{j+k=i} a_j b_k \right) r^i = \sum_{i=0}^{2n} \left( \sum_{j+k=i} a_j r^j . b_k r^k \right)$$

$$= \left( \sum_{j=0}^{n} a_j r^j \right) \left( \sum_{k=0}^{n} b_k r^k \right)$$

$$= \theta(a)(r).\theta(b)(r) = (\theta(a) \ \theta(b))(r)$$

وذلك حسب تعريف الضرب في $R^R$، وعليه فإن $\theta$ تشاكل حلقات. تسمى $\mathrm{im}\theta$ حلقة دوال كثيرات الحدود على $R$. لذلك يكون التطبيق $f \in R^R$ دالة كثيرة حدود إذا وفقط إذا كان يوجد $a_0, ..., a_n \in R$ بحيث إن $f(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i$ لكل $r \in R$. يلاحظ أن $\ker\theta$ تحوي كل عناصر $R[x]$ التي تتلاشى عند التعويض بعناصر $R$، وتحدد كثيرتا حدود $a, b \in R[x]$ نفس التطبيق في $R^R$ إذا وفقط إذا كان $a - b \in \ker\theta$. في حالة كون $R$ حقلا يمكن بسهولة إيجاد معيار للتطبيق $\theta$ حتى يكون متباينا.

**(٣-١٢) مبرهنة**

*يكون التطبيق $\theta : K[x] \to K^K$ المذكور أعلاه متباينا إذا وفقط إذا كان $K$ غير منته.*

**البرهـــــان**

نفرض أولا أن $K$ غير منته. لتكن $a \in \ker\theta$ فيكون $a(r) = 0$ لكل $r \in K$، أي أن كل عنصر من $K$ هو جذر لـ $a$. نلاحظ حسب مبرهنة (٣-١١) أن أي عنصر غير صفري في $K[x]$ له عدد منته من الجذور ويؤدي هذا إلى أن $a = 0$ لأن a لها عدد غير منته من الجذور. وإذن $\ker\theta = \{0\}$ وبالتالي فإن $\theta$ متباين.

لنفرض الآن أن $K$ منته، ولنفرض أن $r_1, r_2, ..., r_n$ عناصره. عندئذ يكون $n \geq 1$ و $(x - r_1) ... (x - r_n)$ عنصر غير صفري من $K[x]$. ولكثيرة الحدود هذه كل عنصر من عناصر $K$ جذر، وبالتالي فهي عنصر من عناصر $\ker\theta$. إذن $\ker\theta \neq \{0\}$ إذا كان $K$ منتهيا.

إن فكرة العنصر الأولي في الحلقة $K[x]$ (حيث $K$ حقل كالعادة) هي خاصية مهمة، وهي فكرة مشابهة جدا لتعريف العدد الأولي في حلقة الأعداد الصحيحة. ومن الممكن أن نثبت أن كل عنصر من $K[x]$ يمكن كتابته كحاصل ضرب عدد من عناصر $K[x]$ الأولية بطريقة وحيدة. لن نتابع هذه النقطة، حيث ستناقش بشكل أكثر تفصيلا مستقبلا. في الحقيقة سيتركز جزء كبير من الفصل التالي على خواص تحليل (factorization) من هذا النوع.

## ٣ – حلقات المصفوفات

إذا كانت $R$ أي حلقة، فإننا نستطيع أن نعرّف $M_n(R)$، مجموعة كل المصفوفات من النوع $n \times n$ التي عناصرها في $R$، بنفس الطريقة في حالة كون $R$ حقلا. إذا عرف الجمع والضرب بالطريقة العادية، فإن $M_n(R)$ تشكل حلقة. يمكن إثبات ذلك بنفس الطريقة كما في حالة الحقل. والسبب الرئيسي لدراسة المصفوفات على حقل قبل غيرها هو ظهورها الطبيعي عند دراسة التحويلات الخطية (linear transformations) للفضاءات المتجهة على حقل. لما كنّا سندرس الحلقيات (modules) على حلقة والتي نحصل عليها بطريقة ما عندما نستبدل حقل الفضاءات المتجهة بشيء أعم وهو الحلقة، فإنه لن يكون مستغربا لو تعرضنا لمصفوفات على حلقات معينة في مكان آخر في الكتاب. لن نحتاج إلى معلومات كثيرة عن حلقات المصفوفات، لكن الملاحظات التالية لها أهمية عامة.

**ملاحظات**

١ – نفرض أن $R$ حلقة وأن $R^2 \neq \{0\}$ (أي يوجد $r, s \in R$ بحيث إن $rs \neq 0$). فيكون:

$$\begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & rs \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن $M_2(R)$ غير إبدالية. بالمثل عندما تكون $n > 2$ فإن $M_n(R)$ غير إبدالية. وفي الواقع، تكون $M_n(R)$ إبدالية إذا وفقط إذا كان $n = 1$ وكانت $R$ إبدالية.

٢ – نقول بشكل دارج إن $M_n(R)$ لها كثير من الحلقات الجزئية وقليل من المثاليات. تكون المجموعات الجزئية للمصفوفات المثلثية العليا (upper trianglular matrices)، والمصفوفات المثلثية السفلى (lower triangular matrices)، والمصفوفات القطرية وكذلك المصفوفات التي تكون عناصر مجموعة معينة من صفوفها أو أعمدتها تساوي صفرا حلقات جزئية. يستطيع القارئ المهتم أن يثبت أن المثاليات في الحلقة $M_n(R)$ هي بالضبط المجموعات الجزئية $M_n(J)$ حيث $J \lhd R$.

٣ - من المفيد في التعامل مع المصفوفات عادة أن نستخدم المصفوفات $E_{ij} \in M_n(R)$ التي عددها $n^2$؛ حيث يساوي عنصر المصفوفة $E_{ij}$ في الموقع $(i, j)$ المحايد، ويساوي باقي عناصرها أصفارا (نفترض طبعا أن $R$ حلقة بمحايد). إذا كان $(r_{ij}) \in M_n(R)$، فإنه يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة كتركيب خطي على الصورة $\Sigma r_{ij} E_{ij}$. إذا كانت $R$ هي الحقل $K$، فإن $M_n(K)$ تشكل فضاء متجها ذا بعد (dimension) $n^2$ على $K$ والمصفوفات $E_{ij}$ تشكل أساسا (basis) له على $K$. يلاحظ أن ضرب المصفوفات $E_{ij}$ هو حسب القاعدة:

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

حيث $\delta_{jk}$ هي دلتا كرونكر (Kronecker delta) ويمكن بسهولة التأكد من أن $M_n(K)$، تمثل جبرية (algebra) على الحقل $K$ حسب التعريف التالي:

الجبرية على الحقل $K$ هي مجموعة $A$ تشكل حلقة وفضاء متجها على $K$ بحيث يكون لهما نفس بنية الزمرة الجمعية ويتحقق الشرط:

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

لكل $a, b \in A$ ولكل $\lambda \in K$. لن نحتاج إلى هذا التعريف المهم في كثير من الموضوعات في هذا الكتاب.

٤ - يمكن تعريف التطبيق $\det : M_n(R) \to R$ الذي يرسل المصفوفة إلى محددها (determinant) في حالة كون الحلقة $R$ إبدالية بنفس الطريقة التي عرّف فيها في حالة كون $R$ حقلا. ويمكن التأكد من صحة كثير من خواص المحددات على حلقة إبدالية بنفس الطريقة كما لو كانت هذه المحددات على حقل، دون تغيير في البراهين، وبعض هذه الخواص سنحتاجها مستقبلا.

## تمارين على الباب الثالث

١ - أي من فصول الحلقات التالية يكون مغلقا تحت تأثير تكوين:

(i) حلقات جزئية (ii) حلقات قسمة

(iii) المجاميع المباشرة (iv) حلقات كثيرات الحدود

(v) حلقات المصفوفات ؟

(ا) الحلقات الإبدالية (ب) الحلقات بمحايد

(جـ) الحلقات التامة (د) الحقول.

أعط برهانا أو مثالا مناقضا لكل حالة.

٢ - لتكن $S = \{1, 2, ..., n\}$ ولتكن $R$ أية حلقة. أثبت أن $R^S$، المجموعة التي تحوي كل التطبيقات من $S$ إلى $R$ والتي تشكل حلقة تحت تأثير العمليات النقطية كما في مثال حلقة (٨)، تماثل المجموع المباشر الخارجي $R \oplus ... \oplus R$ لـ $n$ نسخة من $R$.

٣ - نفرض أن $X$ مجموعة منتهية فيها $n$ من العناصر، وأن $E$ مجموعة جزئية من $X$، ولنعرف التطبيق $\chi_E : X \to \mathbb{Z}_2$ (التطبيق المميز لـ $E$) بالقاعدة:

$$\chi_E(x) = 0 \qquad (x \notin E)$$

$$\chi_E(x) = 1 \qquad (x \in E)$$

أثبت أن $E \to \chi_E$ يشكل تماثلا من الحلقة $P(X)$ (كما هي معرفة في مثال حلقة (٦)) إلى الحلقة $\mathbb{Z}_2^X$. استنتج أن $P(X) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$ لـ $n$ من المجمعات (summands) باستخدام التمرين السابق.

٤ - لتكن $R$ أية حلقة. اعتبر المجموع المباشر الخارجي $\overline{R} = R \oplus \mathbb{Z}$ لـ $R$ و $\mathbb{Z}$ زمرة جمعية وعرّف الضرب على $R \oplus \mathbb{Z}$ بالقاعدة:

$$(r, n)\,(r', n') = (rr' + nr' + n'r\,,\, nn')$$

أثبت أن ذلك يجعل $\overline{R}$ حلقة مع $(0, 1)$ كمحايد، وأن المجموعة التي تحوي كل العناصر $(r, 0)$، حيث $r \in R$، تشكل حلقة جزئية من $\overline{R}$ تماثل $R$. يسمح لنا هذا بأن نغمر حلقة اختيارية في حلقة بمحايد.

٥ - إذا كانت $R, S, T$ حلقات، فأثبت أن:

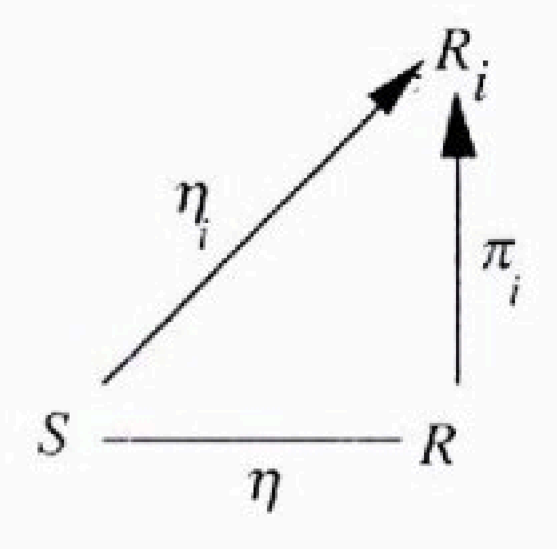
$$R \oplus (S \oplus T) \cong R \oplus S \oplus T$$

٦ - إذا كانت $R$ المجموع المباشر الداخلي $R = J_1 \oplus J_2$، وكانت $S$ حلقة جزئية من $R$ تحوي $J_1$، فأثبت أن $S = J_1 \oplus (S \cap J_2)$، أثبت أيضا أن $R/J_1 \cong J_2$.

٧ - أثبت أن الحلقة $\mathbb{Z}$ لا تماثل الحلقة $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

٨ - أثبت أن أي عنصر في $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ هو جذر لكثيرة الحدود $(1,0)x^2 - (1,0)x \in (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)[x]$ . أثبت أيضا أن أي عنصر في $\mathbb{Z}_4$ هو جذر لكثيرة الحدود $[2]x^2 - [2]x \in \mathbb{Z}_4[x]$ . قارن ذلك مع المبرهنة (٣-١١).

٩ - (الخاصة الشاملة للمجاميع المباشرة). إذا كانت $R_1, R_2$ حلقتين وكانت $R = R_1 \oplus R_2$ (الداخلي أو الخارجي) وكانت $\pi_i : R \to R_i$ الإسقاطات الإحداثية، فأثبت أنه لكل حلقة $S$ ولكل تشاكل $\eta_i : S \to R_i$ يوجد تشاكل وحيد $\eta : S \to R$ يجعل الرسوم التخطيطية التالية تتبادل:




عمم ذلك.

١٠ - باستخدام فكرة التمرين السابق أو سواها، أثبت أنه إذا كان $J_i \lhd R_i$ $(i = 1, 2)$، فإن:

$$(R_1 \oplus R_2)/(J_1 \oplus J_2) \cong (R_1/J_1) \oplus (R_2/J_2)$$

١١ - إذا كانت $R$ المجموع المباشر الداخلي $R = J_1 \oplus \dots \oplus J_n$ للمثاليات $J_i$، فأثبت أنه إذا كان $L_i \lhd J_i$ لكل $i = 1,\dots,n$ فإن

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n \qquad (*)$$

يشكل مثاليا في الحلقة $R$.

لنفرض الآن، أن كل $J_i$ يمثل حلقة بمحايد؛ أي أنه يوجد $e_i \in J_i$ بحيث إن $e_i x = x e_i = x$ لكل $x \in J_i$ . أثبت أنه في هذه الحالة يكون كل مثالي في $R$ له الصيغة (*). أخيرا، إذا كانت $J$ هي الحلقة التي نحصل عليها من $\mathbb{Z}_2^+$ بتعريف أن حاصل ضرب أي عنصرين يساوي صفرا، فأوجد كل المثاليات للحلقة $J \oplus J$ وقارن بالحالة التي سبق أن درست.

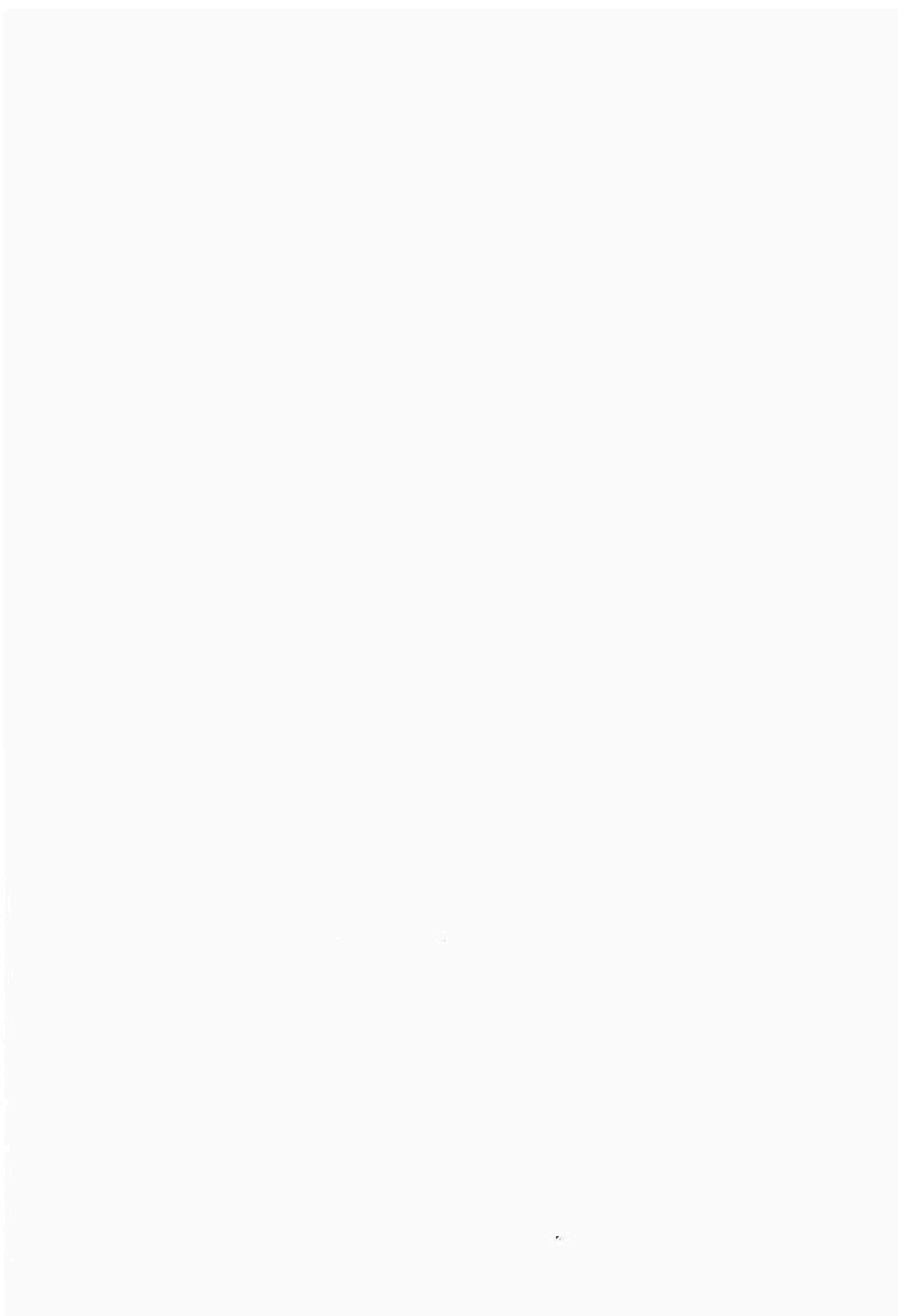
١٢- (الخاصة الشاملة لحلقات كثيرات الحدود). إذا كانت $R$ حلقة إبدالية بمحايد، وكانت $S$ حلقة إبدالية، وكان $\phi : R \to S$ تشاكلا، وكان $a \in S$ فأثبت أنه يوجد تشاكل وحيد $\psi : R[x] \to S$ بحيث إن:

(i) $\psi(r) = \phi(r)$ لكل $r \in R$

(ii) $\psi(x) = a$

ماذا يحدث لو لم تكن الحلقة $R$ بمحايد؟

١٣** - أوجد كثيرة حدود درجتها $p$ في $\mathbb{Z}_{p^n}[x]$ ($p$ عدد أولي) والتي يكون كل عنصر في $\mathbb{Z}_{p^n}$ جذرا لها وأثبت أنه لا يمكن ايجاد كثيرة حدود أخرى غير صفرية يكون كل عنصر من $\mathbb{Z}_{p^n}$ جذرا لها وتكون درجتها أقل من $p$. أوجد أصغر درجة لكثيرة حدود غير تافهة في $\mathbb{Z}_n[x]$ بحيث يكون كل عنصر في $\mathbb{Z}_n$ جذرا لها.



# الفصل الرابع

# التحليل في الحلقات التامة

النتيجة الأساسية في هذا الفصل هي وجود تحليل وحيد لعناصر حلقات تامة معينة (تسمى حلقات تامة رئيسة) إلى عناصر أولية. ولذلك تتصرف هذه الحلقات في هذا الخصوص كما تتصرف الأعداد الصحيحة. سنثبت أن خاصة مشابهة لخاصة خوارزمية القسمة في $\mathbb{Z}$ تكفي لأن تجعل حلقة تامة حلقة تامة رئيسة.

## ١ – الحلقات التامة

لنتذكر تعريف الحلقة التامة الذي أشير إليه في نهاية الفصل الأول وهي حلقة إبدالية بمحايد لا يساوي الصفر، ولا يوجد فيها قواسم للصفر، والشرط الأخير يؤدي إلى صحة استخدام قانون الاختصار للضرب في الحلقات التامة، أي أنه إذا كان $a \neq 0$ وكان $ax = ay$ فإن $x = y$. قد يكون من المناسب الإشارة إلى أنه لا يوجد اتفاق شامل على تعريف الحلقة التامة؛ بعض المؤلفين يحذفون الشرط $1 \neq 0$ وبعضهم يسقطون شرط الإبدال. المثال الأكثر وضوحا على حلقة تامة هو حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$. كذلك أي حقل هو حلقة تامة، ولذلك بصفة خاصة، $\mathbb{Z}_p$ حلقة تامة عندما يكون $p$ عددا أوليا. من ناحية أخرى لا تشكل $\mathbb{Z}_n$ حلقة تامة إذا كان $n$ عددا غير أولي بسبب وجود قواسم للصفر؛ وكمثال على ذلك $\mathbb{Z}_6$ حيث العناصر $[2]$ و $[3]$ ليست صفرية، لكن $[0] = [6] = [2]\,[3]$.

تبرز الحلقات التامة بشكل طبيعي في بعض التخصصات الرياضية المهمة ؛ حيث تظهر كثيرا على الصور التالية :

(١) **حلقات جزئية من حقل.** إذا كان K حقلا فإنه لا يحتوي قواسم للصفر ، لأنه إذا كان $a,b \in K$ وكان $ab = 0$ فإن :

$$b = 1.b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}.0 = 0$$

كذلك $K$ حلقة إبدالية بمحايد لا يساوي الصفر ، لذلك فإن $K$ حلقة تامة . من الواضح أن أية حلقة جزئية من $K$ ولها نفس المحايد ، تشكّل حلقة تامة . فالحلقات التامة تظهر بشكل طبيعي كحلقات جزئية من الحقول ، وفي الواقع سنرى بعد قليل أن كل حلقة تامة تظهر بهذه الكيفية . تؤدي حلقات جزئية معينة من حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ دورا مهما في نظرية الأعداد الجبرية ، مثل حلقة أعداد جاوس والتي سبق أن أشير إليها في مثال حلقة (٥) . وقد حفّزت الأعداد الصحيحة دراسة مثل هذه الحلقات ، ويشمل ذلك محاولة الحصول على خواص لهذه الحلقات مثل وجود ووحدانية التحليل إلى عناصر أولية .

(٢) **حلقات كثيرات الحدود.** لقد لاحظنا في (٣-٧) أنه إذا كانت $R$ حلقة تامة ، فكذلك تكون $R[x]$ ، بالاستقراء نستنتج أن حلقة كثيرات الحدود $R[x_1 , ..., x_n]$ في $n$ متغيرا تمثل حلقة تامة ويمكن أن تعرف بـ $(R[x_1 , ..., x_{n-1}])[x_n]$ . تهتم نظرية الهندسة الجبرية بالأشكال الهندسية التي تظهر كمجموعات لحلول معادلات كثيرات الحدود في الفضاءات التآلفية والإسقاطية (affine and projective spaces) التي يكون بعدها على حقل يساوي $n$ . وكمثال على ذلك ، يمكن وصف كرة الوحدة في الفضاء الإقليدي الثلاثي بأنها مجموعة حلول المعادلة $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ . وليس مستغربا أن تتطلب هذه الدراسة تحليلا دقيقا لبنية الحلقات التامة من الشكل $R[x_1 , ..., x_n]$ . والآلية التي نحتاج إليها من الحلقات الإبدالية في دراسة نظرية الأعداد الجبرية والهندسية الجبرية عولجت علاجا شاملا في المرجع [Zariski *et al*, 1958] .

كما سبق أن ذكرنا ، كل حلقة تامة تظهر كحلقة جزئية من حقل . وهذا هو الموضوع التالي الذي سندرسه .

**(٤-١) مبرهنة**

*إذا كانت $R$ حلقة تامة ، فإنه يوجد حقل $K$ يحوي حلقة جزئية تماثل $R$.*

**البرهـــان**

سيذكرنا البرهان بالطريقة التي بُني بها حقل الأعداد النسبية من الأعداد الصحيحة . لما كانت التفاصيل تتطلب جهدا ومساحة لذلك سنكتفي بإعطاء الخطوات العريضة للبرهان .

**الخطوة (١)**

عرّف على مجموعة الأزواج المرتبة $S = \{(r_1, r_2) : r_1, r_2 \in R, r_2 \neq 0\}$ العلاقة $(r_1, r_2) \sim (s_1, s_2) \Leftrightarrow r_1 s_2 = r_2 s_1$ وأثبت أنها علاقة تكافؤ .

**الخطوة (٢)**

عرّف $[r_1, r_2]$ بأنه فصل تكافؤ $S$ الذي يحوي الزوج المرتب $(r_1, r_2)$، وافرض أن $K$ مجموعة كل هذه الفصول . آخذين في الاعتبار أن $[r_1, r_2]$ يمثل الكسر $r_1/r_2$، لنعرف عمليتي الجمع والضرب على مجموعة فصول التكافؤ كما يلي :

$$[r_1, r_2] + [s_1, s_2] = [r_1 s_2 + r_2 s_1, r_2 s_2]$$

$$[r_1, r_2][s_1, s_2] = [r_1 s_1 + r_2 s_2]$$

أثبت الآن أن هاتين العمليتين حسنتا التعريف على $K$. ويتضمن هذا إثبات أن $r_2 s_2 \neq 0$ (نحتاج عند هذه النقطة إلى غياب قواسم الصفر) وأن تعريفي العمليتين لا يعتمدان على ممثلي فصلي التكافؤ .

**الخطوة (٣)**

تحقق من أن $K$ يحقق شروط الحقل مع هاتين العمليتين ، أي أن $K$ و $K\backslash\{0\}$ تشكلان زمرتين إبداليتين ، الأولى بالنسبة إلى عملية الجمع والثانية بالنسبة لعملية الضرب وكذلك يتحقق أحد قانوني التوزيع . العنصر الصفري هو فصل التكافؤ الذي

يحوي جميع الأزواج المرتبة $(0, r)$ حيث $r \neq 0$، والعنصر المحايد الضربي هو فصل التكافؤ الذي يحوي جميع الأزواج المرتبة $(r, r)$ حيث $r \neq 0$. أيضا:

$$-[r_1, r_2] = [-r_1, r_2]$$

$$[r_1, r_2]^{-1} = [r_2, r_1] \qquad \text{إذا كان } r_1 \neq 0$$

**الخطوة (٤)**

أثبت أن التطبيق $\mu : R \to K$ المعرف بـ $\mu(r) = [r, 1]$ هو تشاكل متباين. لذلك $\mu(R)$ حلقة جزئية من $K$ تماثل $R$.

يسمى الحقل الذي تم بناؤه عادة حقل الكسور (field of fractions) للحلقة التامة $R$. ويوجد إثبات مفصل لهذه الحقيقة في المرجع [Maclane *et al,* 1967].

## ٢ – القواسم، عناصر الوحدة والعناصر المتشاركة

إن الهدف هو إيجاد شيء مشابه لخواص التحليل الموجودة في $\mathbb{Z}$ في صنف واسع من الحلقات، وبصفة خاصة في حلقات تامة معينة. وقد سبق أن ألمحنا إلى خواص التحليل في $\mathbb{Z}$ عدة مرات. للتوضيح سنلخص هذه الحقائق والتي هي بدون شك مألوفة للقارئ. أولا، يسمى $p \in \mathbb{Z}$ عددا أوليا إذا كان (i) $p \neq \pm 1$ (ii) إذا كان $p = ab$، حيث $a, b \in \mathbb{Z}$، فإنه إما $a = \pm 1$ أو $b = \pm 1$. مبرهنة التحليل الوحيد في $\mathbb{Z}$ هي كما يلي:

يمكن تحليل كل عدد صحيح غير صفري $n$ على الصورة:

$$\pm 1 . p_1 \dots p_m$$

حيث $m \geq 0$ و $p_i$ أعداد أولية موجبة. هذا التحليل وحيد تحت سقف (up to) ترتيب الأعداد $p_i$ (أي، لا نأخذ بعين الاعتبار الترتيب الذي تظهر به الأعداد $p_i$).

هذه هي المبرهنة التي نرغب تعميمها. سنلاحظ أن هذه الحقيقة حول $\mathbb{Z}$ هي حالة خاصة. سنتعامل خلال هذا الفصل معاملة شاملة مع الحلقات التامة بالرغم من أن بعض النتائج صحيحة بشكل أعم ولكن الفرض أن الحلقات المستخدمة هي حلقات تامة سيجعل الأشياء أكثر وضوحا.

**ترميز**

سنكتب $R^*$ للدلالة على مجموعة العناصر غير الصفرية في الحلقة $R$.

**(٤–٢) تعريف**

*إذا كان $s$ و $r$ عنصرين من حلقة تامة $R$، فإنه يقال إن $r$ يقسم $s$ (ويرمز لذلك بالرمز $r|s$ ) إذا وجد عنصر $t \in R$ بحيث إن $s = rt$. يسمى $r$ في هذه الحالة عاملا (factor) أو قاسما (divisor) للعنصر $s$. فالمعادلة $r0 = 0$ تعني أن كل عنصر من $R$ هو قاسم للصفر بالرغم من كون $R$ ليس فيها قواسم للصفر. يبدو أن هذه المصطلحات غير جيدة ولكن يبدو أنها لا تؤدي إلى أي ارتباك من الناحية العملية. نشير من ناحية أخرى إلى أن الصفر لا يقسم أي عنصر غير صفري في $R$.*

ماذا يحدث لو تفحصنا خاصية التحليل في حقل الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$؟ إذا كان $r, s \in \mathbb{Q}^*$، فإن $r = (r/s)s$، وبالتالي فإن أي عنصر في $\mathbb{Q}^*$ يقسم كل عنصر آخر فيها. لذلك لا توجد أعداد مرشحة لتكون أعدادا أولية في $\mathbb{Q}$، وبالتأكيد لا يمكن الوصول إلى وحدانية التحليل فيها. و يمكن تجنب هذه الصعوبة بالاتفاق على عدم الخوض فيها ولكي نقوم بذلك نحتاج إلى بعض التعاريف الآخرى.

**(٤–٣) تعاريف**

(١) *نفرض أن $R$ حلقة تامة. يقال عن عنصر إنه عنصر وحدة (unit) في $R$ إذا كان قاسما للمحايد؛ أي أن العنصر $u$ من $R$ يكون عنصر وحدة إذا وجد عنصر $v$ في $R$ بحيث إن $uv = 1$.*

(ب) *نفرض أن $R$ حلقة تامة. نقول عن عنصرين $r, s$ من $R$ إنهما متشاركان (associates) إذا كان $r$ يقسم $s$ وكان $s$ يقسم $r$.*

**ملاحظات**

(١) من الواضح أن أي عنصر وحدة هو عنصر غير صفري. وسنلاحظ أن مجموعة عناصر الوحدة في الحلقة التامة تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب. وكمثال

على ذلك، إن $\mathbb{Z}$ لها عنصرا وحدة هما $\pm 1$ وهما يشكلان زمرة دوروية رتبتها 2 مولدة بالعنصر 1-. من ناحية أخرى، مجموعة عناصر الوحدة في $\mathbb{Q}$ هي $\mathbb{Q}^*$ وهي أكبر ما يمكن. بالتأكيد تشكل $\mathbb{Q}^*$ زمرة ضربية لأن $\mathbb{Q}$ حقل. باستخدام (٣-٧) وبفحص درجات كثيرات الحدود يمكن استنتاج أن عناصر الوحدة في $K[x]$ هي كثيرات الحدود التي درجتها صفر، أي هي عناصر $K^*$.

(٢) إذا كان $a \in R$ وكان $u$ عنصر وحدة في $R$، فإنه يوجد $v$ بحيث إن $uv = 1$ وعليه فإن $a = u(va)$. وبالتالي فإن أي عنصر وحدة يقسم كل عنصر في $R$ (كما يقسم $\pm 1$ كل عنصر في $\mathbb{Z}$).

(٣) يلاحظ أن 2 و 1 بالرغم من أنهما ليسا متشاركين في $\mathbb{Z}$ فإنهما متشاركان كعنصرين من حلقة أكبر وهي $\mathbb{Q}$. وبصورة أعم، العنصران $m, n$ من $\mathbb{Z}^*$ يكونان متشاركين في $\mathbb{Z}$ إذا كان $m = \pm n$، بينما يكونان دائما متشاركين في $\mathbb{Q}$. لذلك فإن مفاهيم القسمة وعناصر الوحدة والتشارك لا تعتمد فقط على العناصر بل تعتمد أيضا على الحلقة التي تنتمي إليها هذه العناصر. لذلك فإنه في بعض الأحيان قد يكون من الضروري التأكيد على ذلك بالتحدث عن التشارك في $R$، . . . الخ.

**ترميز**

لقد سبق أن تم تعريف الجداء $AB$ لمجموعتين غير خاليتين $B$ و $A$ من حلقة $R$. في الحالة التي تكون فيها $A = \{a\}$؛ أي مجموعة تحوي عنصرا وحيدا $a$، سنكتب $aB$ بدلا من $\{a\}B$. يمكن بسهولة التأكد من أن $aR = \{ar : r \in R\}$ بالرغم من أنه لم يعرف بهذه الطريقة. باستخدام (٢-١٥)، إذا كانت $R$ حلقة تامة فإنه يمكن التأكد بسهولة أن $aR$ (أو $Ra$) يشكل مثاليا مولدا بالعنصر $a$.

سنثبت الآن مأخوذة جامعة تضع التعاريف التي سبق التطرق إليها في مواقعها المناسبة.

### (٤-٤) مأخوذة

*إذا كانت $R$ حلقة تامة، فإن:*

(i) $s$ يقسم $t$ إذا وفقط إذا كان $sR \supseteq tR$

(ii) $u$ عنصر وحدة في $R$ إذا وفقط إذا كان $uR = R$

(iii) تشكل المجموعة $U$ التي تحوي كل عناصر الوحدة للحلقة التامة $R$ زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الضرب، وإذا كان $u \in U$ وكان $v|u$ فإن $v \in U$

(iv) علاقة التشارك علاقة تكافؤ على $R$ وللاختصار نرمز لها بالرمز ~. ويكون فصل التكافؤ لهذه العلاقة الذي يحوي العنصر $a$ على الصورة $\{au : u \in U\}$ وكذلك

$$a \sim b \Leftrightarrow aR = bR \Leftrightarrow a = bu$$

حيث $u$ عنصر وحدة في $R$.

(v) العلاقة «يقسم» منسجمة مع ~ ومجموعة فصول التكافؤ ترتب جزئيا بواسطة العلاقة المحدثة بالعلاقة «يقسم».

**البرهـــان**

(i) إذا كان $s$ يقسم $t$، فإنه يوجد $r \in R$ بحيث إن $t = sr$. لذلك $tR = (sr)R = s(rR) \subseteq sR$. وبالعكس، لنفرض أن $tR \subseteq sR$، فيكون $t = t1 \in tR$ وبالتالي $t \in sR$، وإذن $t = sr$ لعنصر $r \in R$، وبالتالي $s$ يقسم $t$.

(ii) باستخدام (i) نحصل على:

$u$ عنصر وحدة $\Leftrightarrow$ $u$ يقسم $1 \Leftrightarrow uR \supseteq 1\,R = R$.

ويعطي هذا النتيجة المطلوبة.

(iii) إذا كان $u_1, u_2$ عنصري وحدة، فإنه يوجد $v_1, v_2 \in R$ بحيث إن $u_1\, v_1 = u_2\, v_2 = 1$ وإذن $(u_1\, u_2)\,(v_1\, v_2) = (u_1\, v_1)\,(u_2\, v_2) = 1$ وبالتالي $u_1\, u_2 \in U$. أيضا $1 \in U$ والعنصر $v_1$ ينتمي إلى $U$ ويكون معكوس $u_1$ الضربي. وعليه فإن $U$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب وهي إبدالية لأن $R$ إبدالية. نفرض الآن أن $uw = 1$ وأن $v$ يقسم u فيكون $u = vv'$ حيث $v' \in R$، وبالتالي $v(v'w) = 1$. إذن $v$ عنصر وحدة.

(iv) حسب التعريف $a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $a|b$ و $b|a$. لما كان $a = 1.a$ فإن $a \sim a$ وبالتالي فالعلاقة انعكاسية. كذلك العلاقة تناظرية من تعريفها. من الواضح

أن $b|c$ و $a|b$ يؤدي إلى أن $a|c$ وبالتالي فالعلاقة متعدية. إذن العلاقة ~ تمثل علاقة تكافؤ. باقي (iv)سيتحقق إذا أثبتنا أن $a \sim b \Leftrightarrow b = au$ حيث $u$ عنصر وحدة. نفرض أن $a \sim b$ و $a \neq 0$ فيكون $a$ يقسم $b$ و $b$ يقسم $a$. إذن $a = bv$ و $b = au$ حيث $u, v \in R$. إذن $a = auv$ وبالتالي $uv = 1$ حسب قانون الاختصار، وعليه فإن $u$ عنصر وحدة. وبالعكس لنفرض أن $b = au$ حيث $u$ عنصر وحدة. فيكون $uv = 1$ حيث $v \in R$. من الواضح أن a يقسم $b$ وكذلك $b$ يقسم a لأن $a = bv$. إذن $a \sim b$. النتيجة صحيحة عندما $a = 0$ حيث إن العنصر الوحيد الذي يكافئ الصفر هو الصفر نفسه.

(v) عندما نقول إن علاقة «يقسم» منسجمة مع ~ فإننا نعني أنه إذا كان $[a], [b]$ فصلي تكافؤ، فإن التعريف:

$$[a] | [b] \Leftrightarrow a|b$$

مستقل عن اختيار $a, b$ ممثلي فصلي التكافؤ. لكي نتأكد أن ذلك هو الحاصل، نفرض أن $[a'] = [a]$ و $[b'] = [b]$. باستخدام (iv) و (i) نحصل على:

$$a|b \Leftrightarrow aR \supseteq bR \Leftrightarrow a'R \supseteq b'R \Leftrightarrow a'|b'$$

وهو المطلوب. كما هو معلوم فإن المجموعة تكون مرتبة جزئيا إذا وجدت علاقة $\rho$ على المجموعة بحيث تكون متعدية وتخالفية، حيث تعني تخالفية أن:

$$a\rho b,\ b\rho a \Leftrightarrow a = b$$

نلاحظ أن علاقة «يقسم» على مجموعة فصول التكافؤ علاقة متعدية، وذلك باستخدام الخاصة المناظرة على عناصر $R$. أيضا إذا كان $[a]$ يقسم $[b]$ و $[b]$ يقسم $[a]$ فإنه من التعريف يكون $a$ يقسم $b$ و $b$ يقسم $a$. وإذن $a, b$ متشاركان وبالتالي $[a] = [b]$.

**ترميز**

سيرمز لمجموعة العناصر المتشاركة مع عنصر معطى $a$ في حلقة تامة $R$ بالرمز $[a]$. نأمل أن لا يسبب ذلك أي ارتباك مع استخدامنا لنفس الرمز للمجموعات المشاركة لـ $\mathbb{Z}_n$.

## ٣ – حلقات التحليل الوحيد

إحدى الطرق لتعميم مبرهنة معطاة هي إعطاء إسم للحلقات التي نتوقع أن تحقق المبرهنة ثم يتم الاستقصاء عن صنف الحلقات التي كونت بتلك الطريقة لكي نتمكن من تحديد علاقتها بالأصناف الأخرى من الحلقات. سنعمل ذلك مع «حلقات التحليل الوحيد».

بالنظر إلى الملاحظات حول عناصر الوحدة المذكورة سابقا، نستنتج أن التعريف التالي هو مثيل واضح لتعريف «الأولي» في الأعداد الصحيحة. من ناحية أخرى، لقد جرت العادة على ربط اسم «غير قابل للتحليل» بهذه الفكرة ونحتفظ بإسم «الأولي» لشيء يختلف قليلا.

**(٤–٥) تعريف**

*نفرض أن $R$ حلقة تامة. يقال إن عنصرا $r$ من $R$ غير قابل للتحليل (irreducible) في $R$ إذا كان: (i) $r$ ليس عنصر وحدة في $R$ و (ii) في أي تحليل $r = ab$ كحاصل ضرب عنصرين $a, b$ من $R$ فإنه إما $a$ عنصر وحدة أو $b$ عنصر وحدة (وبذلك يكون الآخر متشاركا مع $r$).*

هذا يعني أن العناصر غير القابلة للتحليل هي التي يكون لها تحليلات تافهة فقط محدثة بسبب عناصر الوحدة. لاحظ أن المعادلة $0.0 = 0$ تعني أن $0$ قابل للتحليل.

**ملاحظات**

١– يمكن بسهولة رؤية أن كل عنصر متشارك مع عنصر غير قابل للتحليل يكون غير قابل للتحليل. لأنه إذا كان r غير قابل للتحليل وكان $s \sim r$، فإن $r = us$، حيث $u$ عنصر وحدة. من الواضح أن $s$ ليس عنصر وحدة. إذا كان $s = vt$، فإن $r = (uv)t$ وبالتالي فإنه إما تكون $t$ عنصر وحدة أو يكون $uv$ عنصر وحدة. في الحالة الثانية يكون $v$ أيضا عنصر وحدة حسب (٤–٤) (iii).

٢– نلاحظ أن فكرة «غير قابل للتحليل» مثل كثير من الأفكار الأخرى في هذا الفصل تعتمد على الحلقة التي ندرس فيها هذه الفكرة. مثال ذلك العنصر 2 غير قابل للتحليل في $\mathbb{Z}$ ولكنه عنصر وحدة في الحلقة الأوسع $\mathbb{Q}$.

**(٤-٦) تعريف**

*تسمى حلقة تامة $R$ حلقة تحليل وحيد* (unique factorization domain) (UFD)، *أو في بعض الأحيان حلقة جاوس، إذا تحقق ما يلي:*

١ - *كل عنصر $r \in R^*$ يمكن التعبير عنه بالصيغة:*

$$r = u\, a_1 \dots a_n$$

*حيث $u$ عنصر وحدة في $R$، $n \geq 0$ و $a_i$ عناصر غير قابلة للتحليل في $R$. ويسمى هذا شرط وجود التحليل.*

٢ - *إذاكان* $u\, a_1 \dots a_n = u'\, b_1 \dots b_m$

*حيث $u, u'$ عنصرا وحدة في $R$، والعناصر $a_i, b_j$ عناصر غير قابلة للتحليل في $R$، فإن $n = m$ وأيضا $a_i \sim b_{\pi(i)}$ حيث $\pi$ تبديل ما لعناصر المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$. ويسمى هذا شرط وحدانية التحليل.*

**ملاحظات**

١- يلاحظ أن التعريف السابق يحل المشكلة التي سبق أن تعرضنا لها في الحقل $\mathbb{Q}$، حيث إن كل عنصر غير صفري هو عنصر وحدة. لذلك من الواضح أن كل حقل هو حلقة تحليل وحيد.

٢- إن وجود التحليل (الشرط الأول من شروط حلقة تحليل وحيد) هو أفضل تمثيل نتوقع من تحليل مناظر لما في $\mathbb{Z}$، حيث لا نملك، بصفة عامة، طريقة نختار بها عناصر معينة غير قابلة للتحليل تناظر الأعداد الأولية الموجبة في $\mathbb{Z}$.

٣- نستطيع دائما أن نحصل من تحليل معطى $r = u\, a_1, \dots, a_n$ على تحليل آخر حيث تستبدل $a_i$ بعناصر اختيارية متشاركة معها $a_i' = u_i a_i$ كما يلي $r = u u_1^{-1} \dots u_n^{-1} . a_1' \dots a_n'$. لذلك فإن وحدانية التحليل (الشرط الثاني من شروط حلقة تحليل وحيد) هو أيضا أفضل ما نحصل عليه.

قد يكون مناسبا أن تمثل كل الحلقات التامة حلقات تحليل وحيد، لكن ذلك بعيد المنال، فالحلقات الجزئية من حقل الأعداد المركبة قد لا تكون حلقات تحليل وحيد.

**مثـــال**

نفرض أن $R$ ترمز إلى المجموعة الجزئية $\{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ من حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. ليس من الصعب التأكد أن $R$ حلقة جزئية من $\mathbb{C}$ ولما كانت $R$ تحوي محايد $\mathbb{C}$، فهي حلقة تامة. نود أولا أن نحدد عناصر الوحدة لـ R. لنعمـــل ذلك نعتبر التطبيق المعيار (norm function) $n : R \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ المعرف كما يلي:

$$n(\alpha) = |\alpha|^2 = a^2 + 5b^2 \quad \forall \alpha = a + b\sqrt{-5} \in R$$

حيث يرمز $|\ |$ للقيمة المطلقة للعدد المركب. هذا التطبيق $n$ له الخاصة المهمة $n(\alpha\beta) = n(\alpha)\, n(\beta)$ لأن $|\alpha\beta| = |\alpha|\, |\beta|$. يقال عن مثل هذا التطبيق بأنه ضربي. نفرض أن $u$ عنصر وحدة في $R$، فيكون $uv = 1$ حيث $v \in R$ وبالتالي فإن

$$n(u)\, n(v) = n(1) = 1$$

لما كانت $n(u)$ و $n(v)$ أعدادا صحيحة، فلا بد أن يكون $n(u) = n(v) = 1$. ولكن الحلول العددية الصحيحة الوحيدة للمعادلة $a^2+5b^2 = 1$ هي $b = 0$ و $a = \pm 1$ ويؤدي هذا إلى أن $u = \pm 1$ وهكذا فإن هذه هي فقط عناصر الوحدة في $R$.

يلاحظ أن العنصر $6 = 6 + 0\left(\sqrt{-5}\right) \in R$ يمكن تحليله كما يلي:

$$6 = 2.3 = \left(1+\sqrt{-5}\right)\left(1-\sqrt{-5}\right)$$

بالإضافة إلى ذلك، ندعي أن كلا من العناصر الأربعة $1 - \sqrt{-5}$ ، $1 + \sqrt{-5}$ ، 3 و2 غير قابل للتحليل في $R$. فمثلا نفرض أن $2 = \alpha_1\alpha_2$ حيث $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ وكل منهما ليس عنصر وحدة. باستخدام التطبيق المعيار نحصل على:

$$n(\alpha_1)\, n(\alpha_2) = n(\alpha_1\alpha_2) = n(2) = 4$$

بما أن $n(\alpha_1)$ و $n(\alpha_2)$ عددان صحيحان موجبان، فإن $n(\alpha_1)$ لها إحدى القيم 1، 2 و 4. لكن حسب ما لاحظنا سابقا أنه إذا كان $n(\alpha_1) = 1$ فإن $\alpha_1$ عنصر وحدة وهذا يناقض الفرض. وإذا كان $n(\alpha_1) = 4$ فإن $n(\alpha_2) = 1$ وبالتالي $\alpha_2$ عنصر وحدة وهذا يناقض الفرض. لكن لا يوجد حل للمعادلة $a^2+5b^2 = 2$ في الأعداد الصحيحة، لذلك لا يوجد عنصر في $R$ له المعيار 2. وهكذا فإن 2 عنصر غير قابل للتحليل في $R$ (من الواضح أنه ليس عنصر وحدة لأن معياره لا يساوي الواحد). نستطيع بدراسة مماثلة أن نثبت أن $1 - \sqrt{-5}$ ، $1 + \sqrt{-5}$ و 3 عناصر غير قابلة للتحليل.

باستخدام الخاصة الضربية للمعيار نستنتج أن العناصر المتشاركة لها نفس المعيار لأن معيار كل عنصر وحدة يساوي الواحد. إذن 2 الذي معياره يساوي 4، ليس متشاركا مع أي من العنصرين $1 \pm \sqrt{-5}$ اللذين معيارهما 6. لذلك فإن وحدانية التحليل (المذكورة في الشرط الثاني من تعريف حلقة تحليل وحيد) لا تتحقق في $R$ وبالتالي فإن $R$ ليست حلقة تحليل وحيد.

يوجد فارق مهم بين خواص العناصر غير القابلة للتحليل في هذه الحلقة $R$ وبين الأعداد الصحيحة الأولية. يعلم القارئ، بدون شك، أنه إذا كان $p$ عددا صحيحا أوليا، فإن $p$ له الخاصة التالية: إذاكان $a, b \in \mathbb{Z}$ وكان $p|ab$ فإنه إما $p|a$ أو $p|b$. هذه الخاصة مهمة جدا لدرجة أنها تؤخذ عادة كتعريف «للعنصر الأولي» في الحلقات التامة العامة.

**(٤-٧) تعريف**

*يسمى عنصر $r$ من حلقة تامة $R$ أوليا* (prime) *(في $R$) إذا تحقق الشرطان التاليان:*

(i) *$r$ ليس صفرا وليس عنصر وحدة.*

(ii) *إذاكان $a, b \in R$ وكان $p$ يقسم $ab$ فإن $p$ إما يقسم $a$ وإما يقسم $b$.*

بالقاء نظرة سريعة على المثال السابق يتبين أن العناصر غير القابلة للتحليل ليست دائما أولية، إذ نلاحظ أن:

$$2 \left| \left(1+\sqrt{-5}\right)\left(1-\sqrt{-5}\right)\right.$$

بينما 2 لا يقسم أي عامل منهما. نستطيع أن نرى ذلك بسهولة باستخدام المعيار.

تعطي المأخوذة التاليةتعريفا مكافئا للعنصر الأولي، بالرغم من أنه لن يخدم أغراضنا المباشرة لكننا سنذكره لأهميته.

**(٤-٨) مأخوذة**

*نفرض أن $R$ حلقة تامة ونفرض أن $p \in R^*$. عندئذ يكون $p$ عنصرا أوليا إذا وفقط إذا كان $R/pR$ حلقة تامة.*

**البرهــــان**

نفرض أولا أن $p$ عنصر أولي. وإذن $p$ ليس عنصر وحدة وبالتالي $p$ لا يقسم 1 وهكذا فإن $1 \notin pR$. إذن $1 + pR \neq pR$. يعني هذا أن المحايد الجمعي والمحايد الضربي للحلقة $R/pR$ مختلفان. من الواضح أن $R/pR$ حلقة إبدالية. لنفرض أن $(a+pR)(b+pR) = pR$ هو العنصر الصفري لـ $R/pR$، إذن $ab + pR = pR$، $ab \in pR$، وبالتالي $p|ab$. إذن $p|a$ أو $p|b$، في الحالة الأولى $a + pR = pR$ وفي الحالة الثانية $b + pR = pR$. فالحلقة $R/pR$ ليس فيها قواسم للصفر وبالتالي فهي حلقة تامة.

نفرض الآن أن $p \in R^*$ وأن $R/pR$ حلقة تامة. إذن $1 + pR \neq pR$، $p$ لا يقسم 1 وكذلك $p$ ليس عنصر وحدة. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $a, b \in R$ وكان $p|ab$، فإن $ab + pR = pR$ وبما أنه في الحلقة $R/pR$ لا توجد قواسم للصفر، لذلك إما $a + pR = pR$ أو $b + pR = pR$ ويؤدي هذا إلى أنه إما $p|a$ أو $p|b$ وإذن $p$ أولي.

إن العلاقة بين العناصر الأولية والعناصر غير القابلة للتحليل لها أهمية أساسية في تحديد كون الحلقة التامة المعطاة تمثل حلقة تحليل وحيد أم لا، كما سنرى ذلك الآن. إحدى طرق العلاقة بينهما مباشرة.

**(٤-٩) مأخوذة**

*إذا كانت $R$ حلقة تامة، فإن كل عنصر أولي في $R$ يكون غير قابل للتحليل.*

**البرهــــان**

نفرض أن $p$ عنصر أولي في $R$. إذن $p$ ليس عنصر وحدة حسب التعريف. نفرض أن $p = ab$ حيث $a,b \in R$. بالتأكيد $p|ab$، لذلك إما $p|a$ أو $p|b$. في الحالة الأولى يكون $a = pc$ حيث $c \in R$ وبالتالي $p = pbc$. باستخدام قانون الاختصار نحصل على $bc = 1$. وإذن b هو عنصر وحدة. وبالمثل نثبت أنه إذا كان $p|b$ فإن $a$ عنصر وحدة. وإذن $p$ عنصر غير قابل للتحليل.

**(٤-١٠) مبرهنة**

*إذاكانت $R$ حلقة تامة ، فإنها تكون حلقة تحليل وحيد إذا وفقط إذا كان*

(i) *$R$ تحقق شرط وجود التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد .*

(ii) *كل عنصر غير قابل للتحليل في $R$ يكون عنصرا أوليا في $R$ .*

*لذلك على افتراض شرط وجود التحليل في حلقة تامة ، نلاحظ أن شرط وحدانية التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد ، يكافئ الشرط الثاني من هذه المبرهنة .*

**البرهـــــان**

نفرض أولا أن $R$ حلقة تحليل وحيد ولنفرض أن $r$ عنصر غير قابل للتحليل من $R$ . إذن $r$ ليس عنصر وحدة ولا يساوي صفرا . ليكن $a,b \in R$ وليكن $r$ يقسم $ab$ . فيكون $rs = ab$ لعنصر $s \in R$ . باستخدام شرط وجود التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد نحصل على :

$$s = us_1 \dots s_l$$
$$a = va_1 \dots a_m$$
$$b = wb_1 \dots b_n$$

حيث $u, v, w$ عناصر وحدة ، بينما $s_i, a_j, b_k$ عناصر غير قابلة للتحليل . من $rs = ab$ نحصل على

$$urs_1 \dots s_l = (vw)\, a_1 \dots a_m\, b_1 \dots b_n$$

كل طرف من المعادلة السابقة له الصورة «عنصر وحدة مضروب في حاصل ضرب عناصر غير قابلة للتحليل» . وباستخدام وحدانية التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد نستنتج أن $r$ متشارك إما مع عنـصر $a_i$ أو مع عنصر $b_i$ . في الحالة الأولى $r|a_i$ وبالتالي $r|a$ وفي الحالة الثانية $r|b$ . وإذن $r$ عنصر أولي .

الآن سنفرض وجود التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد ، وكذلك نفرض أن كل عنصر غير قابل للتحليل في $R$ عنصـر أولـي . ضع

$$up_1 \dots p_l = vq_1 \dots q_m \qquad (*)$$

حيث ، $l, m \geq 0$ و $u, v$ عنصرا وحدة وكل $p_i$ و $q_i$ غير قابل للتحليل . يجب أن نثبت أن $l = m$ وأن $p_i$ متشارك مع $q_i$ (بعد إعادة الترتيب إذا لزم ذلك) لكل $i = 1, ..., l$ . سنعمل ذلك بالاستقراء على $l$. إذا كان $l = 0$ ، فإنه يكون لدينا $u = vq_1 ... q_m$ . إذا كان $m > 0$ ، فإنه لما كان u يقسم 1 ، فإن كل $q_j$ يقسم 1 وبالتالي يكون كل $q_j$ عنصر وحدة . يناقض هذا تعريف عدم قابلية التحليل ، لذلك $m = 0$ إذاكان $l = 0$ . الآن نفرض أن $l > 0$ وأن وحدانية التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد تتحقق لكل المعادلات من الصيغة (*) ولأقل من $l$ من العناصر غير القابلة للتحليل التي تظهر على يسار المعادلة . لما كان $p_l$ غير قابل للتحليل فهو أولي حسب الفرض أعلاه . لذلك $p_l$ التي تقسم حاصل الضرب في الجهة اليمنى من المعادلة (*) ، تقسم أحد عوامل حاصل الضرب . لكن $p_l$ لا تقسم $v$ (وإلا كانت عنصر وحدة) ، إذن $m > 0$ وبالتالي يمكن أن نفترض بعد إعادة الترتيب أن $p_l$ يقسم $q_m$ . وحيث إن $q_m$ عنصر غير قابل للتحليل ، فإن عوامله هي عناصر وحدة وعناصر متشاركة معه . إذن $p_l \sim q_m$ ومنه $p_l = u'q_m$ حيث $u'$ عنصر وحدة . نعوض عن قيمة $p_l$ في المعادلة (*) ونحذف $q_m$ من الطرفين فنحصل على المساواة :

$$(uu')p_1 ... p_{l-1} = vq_1 ... q_{m-1} \qquad (**)$$

الآن يتحقق شرط وحدانية التحليل على المعادلة (**) ، لذلك $l - 1 = m - 1$ و $p_1, ..., p_{l-1}$ تكون متشاركة مع $q_1, ..., q_{l-1}$ بعد إعادة ترتيب إذا لزم الأمر . يؤدي هذا إلى أن $l = m$ وحيث إن $p_l \sim q_m = q_l$ فإنه يكون قد ثبت المطلوب .

ينتج عن النتيجتين السابقتين تطابق فكرة الأولي مع فكرة غير قابل للتحليل في حلقة تحليل وحيد ؛ وبصفة خاصة هذا صحيح في حلقة الأعداد الصحيحة . ويوضح هذا لماذا يكون التعريف الذي يعطى عادة للعدد الأولي في $\mathbb{Z}$ هو في الحقيقة نفس تعريف غير قابل للتحليل .

### ٤ – الحلقات التامة الرئيسة والحلقات الإقليدية

سنقدم الآن نوعين جديدين من الحلقات وسيتبين بعد ذلك أنها حلقات تحليل وحيد .

**(٤-١١) تعاريف**

*يـقال عن مثالي $J$ في حلقة تامة $R$ إنه مثالي رئيسي* (principal ideal) *في $R$ إذا وجد عنصر $a$ في $R$ يولد $J$؛ أي أن $J = aR$. تسمى حلقة $R$ حلقة تامة رئيسة* (principal ideal domain) (PID) *إذا كانت حلقة تامة وكان كل مثالي فيها رئيسيا .*

**أمثلـــة**

١ - لتكن $R$ حلقة تامة . المثاليـان $\{0\}$ و $R$ مثاليان رئيسيان ، لكونهما مولدين بـ $0$ و $1$ على الترتيب .

٢ - كل حقل $K$ هو حلقة تامةرئيسة . يلاحظ بسهولة (انظر تمرين (٥) في الفصل الثاني) أن المثاليات الوحيدة في $K$ هي $\{0\}$ و $K$ .

٣ - حلقة الأعداد الصحيحة حلقة تامة رئيسة ، كذلك إذا كان $K$ حقلا ، فإن $K[x]$ حلقة تامة رئيسة . سنثبت هذه الحقائق لاحقا . مع ذلك ، $R[x]$ ليست حلقة تامةرئيسة بصفة عامة . انظر تمريني (٨) و (١٤) في نهاية هذا الفصل .

لكي نثبت مثال (٣) المذكور أعلاه ولكي نحصل على أمثلة أخرى عن حلقات تامة رئيسة نقدم نوعا آخر (وأخير) من الحلقات تسمى الحلقات الإقليدية . يتم الحصول على هذه الحلقات بتوسيع خاصة القسمة الإقليدية ، التي تشترك فيها $\mathbb{Z}$ و $K[x]$ (انظر نهاية الفصل الثاني وكذلك (٣-٨)) .

**(٤-١٢) تعريف**

*نقول عن الحلقة التامة $R$ إنها حلقة إقليدية* (Euclidean domain) (ED) *إذا وجدت دالة $\phi : R^* \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ بحيث :*

(i) $a$ *يقسم* $b \Leftarrow \phi(a) \leq \phi(b)$

(ii) *إذا كان* $a \in R$ *و* $b \in R^*$ *فإنه يوجد* $q, r \in R$ *بحيث إن* $a = bq + r$ *وإن* $r = 0$ *أو* $\phi(r) < \phi(b)$ .

يسمى التطبيق $\phi$ دالة إقليدية (Euclidean function) على $R$، ويسمى الشرط (ii) شرط خاصة القسمة الإقليدية . قد يوجد كثير من الدوال الإقليدية التي تجعل

الحلقة التامة حلقة إقليدية. كما لاحظنا، $\mathbb{Z}$ و $K[x]$ حلقتان إقليديتان. سنستقصي الحلقات الإقليدية عن كثب في البند الخامس من هذا الفصل وسبب اهتمامنا بها هنا يرجع إلى أن كل حلقة إقليدية هي حلقة تامة رئيسة كما توضح ذلك المأخوذة التالية.

**(٤-١٣) مأخوذة**

*كل حلقة إقليدية هي حلقة تامة رئيسة.*

**البرهان**

البرهان مثيل لإثبات (٢-١٧) حيث أثبتنا أن $\mathbb{Z}$ حلقة تامة رئيسة (وأكثر من ذلك بكثير). نفرض أن $R$ حلقة إقليدية وأن $J \lhd R$. إذا كان $J = \{0\}$، فإن $J$ مثالي رئيسي. نفرض أن $J \neq \{0\}$. نلاحظ أن مجموعة قيم الدالة الإقليدية على عناصر $J$ غير الصفرية تشكل مجموعة جزئية غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة، ولذلك فهي تحوي عددا أصغر. لنختر b عنصرا غير صفري في $J$ بحيث إن $\phi(b)$ له أصغر قيمة ممكنة. نحن ندعي أن $J = bR$.

لما كان $b \in J \lhd R$، فإنه بالتأكيد $bR \subseteq J$. وبالعكس إذا كان $a \in J$، فإنه حسب شرط خاصة القسمة الإقليدية $a = bq + r$ حيث $q, r \in R$ و $r = 0$ أو $\phi(r) < \phi(b)$. الآن $r = a - bq \in J$. إذاكان $r \neq 0$، فإن $\phi(r) < \phi(b)$ يناقض اختيار $b$. لذلك $r = 0$ وبالتالي $a \in bR$ وهكذا فإن $J = bR$. (لاحظ أننا لم نستخدم الشرط الأول من شروط الحلقة الإقليدية في الإثبات وفي الواقع ستظهر قيمته واضحة فيما بعد عندما ندرس عناصر الوحدة في الحلقة الإقليدية).

لقد تأكد لنا وجود مخزون كاف من حلقات تامة رئيسة وهذا ما يجعل المبرهنة التالية ذات أهمية خاصة.

**(٤-١٤) مبرهنة**

*كل حلقة تامة رئيسة هي حلقة تحليل وحيد.*

الطريقة المناسبة لإثبات هذه المبرهنة، باستخدام مبرهنة (٤-١٠)؛ أي نثبت أن أي حلقة تامة رئيسة تحقق شرط وجود التحليل وأن كل عنصر غير قابل للتحليل فيها يكون عنصرا أوليا. سنتعامل مع هذين الشرطين بشكل منفصل ونبدأ بإثبات الأسهل.

**(٤-١٥) مأخوذة**

*كل عنصر غير قابل للتحليل في حلقة تامة رئيسة هو عنصر أولي.*

**البرهـــان**

نفرض أن $R$ حلقة تامة رئيسة وأن $p$ عنصر غير قابل للتحليل في $R$. يجب أن نثبت أن $p$ عنصر أولي. بالتأكيد $p$ ليس صفرا ولا عنصر وحدة. نفترض أن $p$ يقسم $ab$ حيث $a, b \in R$. نفرض أن $p$ لا يقسم $a$ ونثبت في هذه الحالة أن $p$ يقسم $b$. خذ المثالي $pR + aR$ في R. بما أن $R$ حلقة تامة رئيسة، لذلك يوجد $d \in R$ بحيث إن $pR + aR = dR$. إذن $d$ يقسم $a$ ويقسم $p$. لما كان $p$ عنصرا أوليا، فإنه إما $d$ عنصر وحدة أو $d \sim p$. في الحالة الثانية يكون $p$ يقسم $d$ وبالتالي $p$ يقسم $a$ وهذا يناقض الفرض. إذن $d$ عنصر وحدة وبالتالي $pR + aR = R$ حسب (٤-٤) (ii). ويؤدي هذا إلى أن $ps + at = 1$ حيث $s, t \in R$. إذن $b = psb + tab$. لما كان $p$ يقسم $ab$، فإنه يقسم الطرف الأيمن من المعادلة وبالتالي $p$ يقسم $b$ كما هو مطلوب.

برهان المبرهنة (٤-١٤) سيكتمل بإثبات المأخوذة التالية.

**(٤-١٦) مأخوذة**

*كل حلقة تامة رئيسة تحقق شرط وجود التحليل.*

**البرهـــان**

سنثبت المأخوذة باستخدام التناقض. نفرض أن النتيجة غير صحيحة؛ أي توجد حلقة تامة رئيسة $R$ ويوجد عنصر $r \in R^*$ لا نستطيع كتابته في الصيغة المذكورة في شرط وجود التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد. سنسمي مثل هذه العناصر في $R^*$

عناصر «سيئة» والأخرى عناصر «جيدة» وهي عناصر $R^*$ التي يمكن كتابتها في الصيغة المذكورة في شرط وجود التحليل . الآن ، العنصر السيء $r$ ، بصفة خاصة ، ليس عنصر وحدة ، ولا يمكن أن يكون غير قابل للتحليل ، وإلا حقق شرط وجود التحليل . لذلك يمكن التعبير عنه بالصيغة $r = r_1 s_1$ حيث $s_1$ و $r_1$ ليسا عنصري وحدة وبالتالي غير متشاركين مع $r$ . بالإضافة إلى ذلك يجب أن يكون أحدهما سيئا وإلا أعطانا كل من تحليل $r_1$ وتحليل $s_1$ تحليلا جيدا لـ $r$ . قد يحتاج الأمر إلى إعادة تسمية العاملين $r_1, s_1$ حتى يكون $r_1$ سيئا . عندئذ ، يكون $r_1$ يقسم $r$ وليس متشاركا معه . الآن ، نعيد هذه الطريقة على $r_1$ فنحصل على عنصر سيء $r_2$ يقسم $r_1$ وليس متشاركا معه . وإذا استمرت هذه العملية وكتبنا $r = r_0$ سنحصل على متتالية لا نهائية ... $r_0, r_1, r_2,$ من العناصر السيئة بحيث إن $r_{i+1}$ يقسم على $r_i$ وليس متشاركا معه لكل ... $i = 0, 1,$ . وباستخدام المأخوذة (٤-٤) فإن المثاليات المولدة بالعناصر $r_i$ تحقق

$$\mathrm{Rr}_0 \subset \mathrm{Rr}_1 \subset \mathrm{Rr}_2 \subset \ldots$$

ليكن $J = \bigcup_{i=0}^{\infty} Rr_i$ . بالاستناد إلى (٢-١٣) يكون $\mathrm{J} \lhd \mathrm{R}$ . وبالتالي فإن $J = Rd$ حيث $d \in R$ ؛ لأن $R$ حلقة تامة رئيسة . وعليه فإن $d \in J$ وبالتالي فإن $d \in Rr_i$ لعنصر $r_i$ وهذا يؤدي إلى أن :

$$Rd \subseteq Rr_i \subseteq \mathrm{J} = Rd$$

إذن $\mathrm{J} = \mathrm{Rr}_i$ ، لكن $Rr_i \subset Rr_{i+1} \subseteq J = Rr_i$ وهذا تناقض . لذلك لا يوجد عنصر سيء في $R^*$ وهو المطلوب .

**ملاحظة**

لقد تم حجب حاجة النقاش في برهان المأخوذة السابقة إلى استخدام مُسلّمة الاختيار (Axiom of Choice) . ونحتاج عند مرحلة مناسبة في النقاش إلى أن نقول شيئا ما مثل : توجد عناصر سيئة تقسم $r_i$ وليست متشاركة معه ، نختار واحدا منها ونسميه $r_{i+1}$ . وسيلفت هذا الانتباه إلى حاجة النقاش إلى عدد غير منته من الاختيارات الاعتباطية . يمكن للقارى ، الذي نجحنا في إثارة حب الاستطلاع لديه ، الرجوع إلى

المرجع [Halmos, 1960] أو المرجع [Kelley, 1955] لمعرفة تفاصيل أكثر عن مُسلَّمة الاختيار والموضوعات المتعلقة بها.

**ملخص**

النقاط الرئيسة في هذا البند يمكن تلخيصها بالصيغة التالية التي من السهل تذكرها.

حلقة إقليدية $\Leftarrow$ حلقة تامة رئيسة $\Leftarrow$ حلقة تحليل وحيد.

## ٥ – تفاصيل أكثر عن الحلقات الإقليدية

رأينا أن كل حلقة إقليدية هي حلقة تامة رئيسة. وعكس ذلك ليس صحيحا، حيث توجد أمثلة كثيرة على حلقات تامة رئيسة لا تشكل حلقات إقليدية (مثال ذلك حلقة الأعداد الصحيحة للحقل $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-19}\right)$) ولكننا لن نحاول أن نثبت ذلك. يناقش مثل هذا السؤال في المرجع [Samuel, 1958] كما توجد مقدمة عن المسألة العامة للتحليل في الحلقات. يلاحظ أن التعامل مع الحلقات الإقليدية أسهل من التعامل مع الحلقات التامة الرئيسة، لذلك سنقضي معها بعض الوقت في هذا البند. توضح المأخوذة التالية كيف نستطيع التعرف على عناصر الوحدة في الحلقة الإقليدية.

**(٤–١٧) مأخوذة**

*إذاكانت $R$ حلقة إقليدية وكان $u \in R^*$، فإن $u$ عنصر وحدة إذا وفقط إذا كان $\phi(u) = \phi(1)$.*

**البرهـــان**

إذاكان $u$ عنصر وحدة فإن $u|1$، وكذلك $1|u$ وبالتالي $\phi(u) = \phi(1)$ حسب الشرط الأول للحلقة الإقليدية.

وبالعكس، نفرض أن $\phi(u) = \phi(1)$. باستخدام خاصة القسمة الإقليدية يكون $1 = uq + r$ حيث إما $r = 0$ أو $\phi(r) < \phi(u) = \phi(1)$، لكن 1 يقسم $r$. لذلك $\phi(r) \geq \phi(1)$ إذاكان $r \neq 0$. إذن $r = 0$ وبالتالي u عنصر وحدة.

سبق أن رأينا أن كل حلقة إقليدية هي حلقة تامة رئيسة، بالإضافة إلى ذلك كل مثالي J في حلقة إقليدية يولد بواسطة أي عنصر غير صفري فيه له أقل قيمة لـ $\phi$. توجد طريقة جلية في الحلقة الإقليدية لإيجاد عنصر مثل المذكور أعلاه من بين مجموعة معطاة من مولدات $J$ تسمى خوارزمية إقليدس (Euclidean algorithm) ونوضحها الآن.

نفرض أن $a, b$ عنصران من حلقة إقليدية $R$ ونفرض أن $b \neq 0$. باستخدام خاصة القسمة الإقليدية نستطيع كتابة $a = bq + r$ حيث إما $r = 0$ أو $\phi(r) < \phi(b)$. نحن ندعي أن $\{a, b\}$ و $\{b, r\}$ تولدان نفس المثالي في $R$. ليكن $J_1$ و $J_2$ المثاليين المولدين على الترتيب. لما كان $a = bq + r$ فإن $a \in J_2$ وبالتالي $J_1 \subseteq J_2$ ؛ من ناحية أخرى $r = a - bq \in J_1$ ويؤدي هذا إلى أن $J_2 \subseteq J_1$. علاوة على ذلك، يحصل أحد الحدثين التاليين: إما $r = 0$ والمثالي المولد بواسطة $a, b$ يولد بواسطة $b$ وحده، أو نجد زوجا جديدا $\{b, r\}$ من مولدات $J$ بحيث تنقص قيمة $\phi$ للمولد الثاني $r$. نعيد العملية في الحالة الثانية. لما كانت قيم $\phi$ أعدادا طبيعية ولا نستطيع تخفيضها إلى مالا نهاية، فإننا أخيرا نخفض المولد الثاني إلى الصفر. وتكون طريقة الحساب كما يلي (من الملائم أن نستخدم $b_0, b_1$ بدلا من $a, b$):

$$b_0 = b_1 q_1 + b_2 \qquad \phi(b_2) < \phi(b_1)$$

$$b_1 = b_2 q_2 + b_3 \qquad \phi(b_3) < \phi(b_2)$$

..........................................................

..........................................................

$$b_{n-1} = b_n q_n + b_{n+1} \qquad \phi(b_{n+1}) < \phi(b_n)$$

$$b_n = b_{n+1} q_{n+1}$$

وحسب ما أشرنا فإن الأزواج $\{b_i, b_{i+1}\}$ جميعها تولد نفس المثالي. أخيرا نحصل على $Rb_0 + Rb_1 = Rb_{n+1}$ والذي يعطينا مولدا واحدا للمثالي المولد بواسطة $b_0, b_1$. بتطبيق هذه العملية عدة مرات، نحصل على مولد واحد من أي مجموعة منتهية معطاة، حيث يستبدل زوج من المولدات بمولد واحد في كل مرحلة.

توجد طريقة أخرى مهمة جدا للنظر إلى الحسابات التي وصفناها، باستخدام عوامل مشتركة عليا.

**(٤-١٨) تعريف**

*لتكن $R$ حلقة تامة ولتكن $a_1, ..., a_n$ عناصر من $R$. عندئذ يسمى $d \in R$ عاملا مشتركا أعلى (highest common factor) (يسمى أحيانا قاسما مشتركا أعظم (greatest common divisor)) لـ $\{a_1, ..., a_n\}$ في $R$ إذا حقق الشرطين التاليين:*

(i) d يقسم $a_i$ لكل $1 \le i \le n$

(ii) *إذا كان $d' \in R$ وكان $d'$ يقسم $a_i$ لكل $1 \le i \le n$، فإن $d'$ يقسم $d$.*

قد لا تملك مجموعة عناصر في حلقة تامة عاملا مشتركا أعلى. مع ذلك، إذاكان كل من $d^*$ و $d$ عاملا مشتركا أعلى لمجموعة $\{a_1, ..., a_n\}$، فإنه باستخدام (ii) يلاحظ أن $d$ يقسم $d^*$ وكذلك $d^*$ يقسم $d$ وبالتالي $d \sim d^*$. علاوة على ذلك، لكل عنصر متشارك مع $d$ الصيغة $du$؛ حيث $u$ عنصر وحدة، ويؤدي هذا إلى أنه عامل مشترك أعلى لـ $\{a_1, ..., a_n\}$. لذلك نلاحظ أن مجموعة العوامل المشتركة العليا لمجموعة معطاة من العناصر، إذا كانت غير خالية، هي $[d]$، المجموعة التي تحوي العناصر المتشاركة مع عامل مشترك أعلى معين $d$. نرمز لمجموعة العوامل المشتركة العليا لزوج من العناصر $a, b$ بالرمز $(a, b)$، آخذين في الاعتبار أن هذه المجموعة تحوي غالبا أكثر من عنصر. ونشير بالمناسبة أن التعبير «الأعلى» يعني الأعلى بالنسبة إلى الترتيب الجزئي لفصول التكافؤ للعناصر المتشاركة والمقدم في (٤-٤).

**(٤-١٩) مأخوذة**

*توجد عوامل مشتركة عليا لأي مجموعة غير خالية $\{a_1, ..., a_n\}$ من عناصر حلقة تامة رئيسة. يكون عنصر $d$ عاملا مشتركا أعلى لـ $\{a_1, ..., a_n\}$ إذا وفقط إذا كان $\sum_{i=1}^{n} Ra_i = Rd$. يمكن التعبير عن كل عامل مشترك أعلى لـ $\{a_1, ..., a_n\}$ بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i$، حيث $r_i \in R$.*

**البرهـــان**

يلاحظ أن $\sum_{i=1}^{n} Ra_i = Rd$ ، حيث $d \in R$ وذلك لكون $R$ حلقة تامة رئيسة . لما كانت $a_i \in Rd$ ، فإن d يقسم $a_i$ لكل $i = 1, ..., n$ . من ناحية أخرى $d \in \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ وبالتالي $d = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ ، حيث $r_i \in R$ . لذلك إذاكان $d' \in R$ وكان $d'$ يقسم $a_i$ لكل $i$ ، فإن $d'$ يقسم $d$ . لذلك فإن أي عنصر $d$ مولد للمثالي $\sum_{i=1}^{n} Ra_i$ عامل مشترك أعلى لـ $\{a_1, ..., a_n\}$ . ولما كانت العوامل المشتركة العليا متشاركة مع بعضها ، وكانت العناصر المتشاركة مع بعضها تولد نفس المثالي فقد ثبت المطلوب .

**(٤-٢٠) نتيجة**

*إذا كانت $R$ حلقة إقليدية ، فإن تطبيق خوارزمية إقليدس على عنصرين $b_0, b_1$ في $R$ يقود إلى عامل مشترك أعلى للعنصرين $b_0, b_1$ .*

يلاحظ أنه لو استخدمنا خوارزمية إقليدس من الأسفل إلى الأعلى فإنه يمكن التعبير عن $b_{n+1}$ كتركيب خطي للعنصرين $b_0, b_1$ إذا رغبنا ذلك .

**أمثلة محلولة**

١ - احسب عاملا مشتركا أعلى لكثيرتي الحدود

$$x^3 + 2x^2 + 4x - 7 \quad , \quad x^2 + x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$$

نطرح مضاعفات لـ $x^2 + x - 2$ من $x^3 + 2x^2 + 4x - 7$ حتى نحصل علي كثيرة حدود درجتها أقل من 2 . ويعتمد المضاعف الذي يطرح في كل مرحلة على الحدود ذات الدرجات العليا . الآن :

$$x^3 + 2x^2 + 4x - 7 = x(x^2 + x - 2) + x^2 + 6x - 7$$

$$x^2 + 6x - 7 = 1(x^2 + x - 2) + 5x - 5$$

ويؤدي هذا إلى أن :

$$x^3 + 2x^2 + 4x - 7 = (x^2 + x - 2)\ (x + 1) + 5x - 5$$

كخطوة أولى لخوارزمية إقليدس . الخطوة التالية هي :

$$x^2 + x - 2 = (5x - 5)\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)$$

الباقي الآن صفر ، وبالتالي $5x - 5$ (أو العنصر المتشارك معه $x - 1$ ) عامل مشترك أعلى لكثيرتي الحدود المعطاتين .

٢ - أثبت أن حلقة أعداد جاوس حلقة إقليدية . أوجد عاملا مشتركا أعلى للعنصرين $11 + 7i$ و $3 + 7i$ في هذه الحلقة .

نعلم أن حلقة أعداد جاوس $R$ هي الحلقة الجزئية $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ من $\mathbb{C}$ . إذا كان $r = a + bi \in R$ ، نعرف $\phi(r) = |r|^2 = a^2 + b^2$ حيث $|\ |$ هي القيمة المطلقة للعدد المركب . يلاحظ أن $\phi(rs) = \phi(r)\ \phi(s)$ وبالتالي الشرط الأول من شروط الحلقة الإقليدية متحقق .

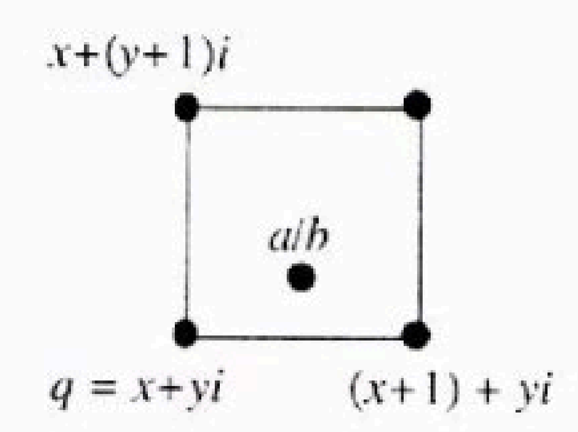
حتى نتأكد من تحقق الشرط الثاني من شروط الحلقة الإقليدية ، نفرض أن $a, b \in R$ حيث $b \neq 0$ ونعتبر العدد المركب $a/b$ . نستطيع الآن أن نفكر في عناصر $R$ كنقاط إحداثياتها أعداد صحيحة في المستوى المركب ونقسم المستوى المركب إلى مربعات أطوال أضلاعها 1 بطريقة عادية ، فتكون رؤوس المربعات عناصر $R$ . يقع العدد المركب $a/b$ داخل أو على حدود أحد هذه المربعات ؛ لما كان طول قطر المربع يساوي $\sqrt{2}$ ، فإنه يوجد رأس مربع يبعد بمسافة تقل عن أو تساوي $\sqrt{2}/2$ من $a/b$ (انظر الشكل) . نفرض أن $q$ هو ذلك الرأس ، عندئذ يكون $|(a/b) - q| \leq \sqrt{2}/2 < 1$ ، وبوضع $r = a - bq$ ، يكون $a = bq + r$ ، وأيضا

$$|r| = |a - bq| = |b|\ |(a/b) - q| < |b|$$

وبالتالي

$$\phi(r) = |r|^2 < |b|^2 = \phi(b)$$

ويحقق هذا الشرط الثاني من شروط الحلقة الإقليدية .




سنستخدم الآن خوارزمية إقليدس لكي نجد عاملا مشتركا أعلى للعنصرين $11 + 7i$ و $3 + 7i$ . نلاحظ أن :

$$(11 + 7i)/(3 + 7i) = (11 + 7i)(3 - 7i)/58 = (82 - 56i)/58$$

العنصر الأقرب في $R$ لهذا العنصر هو $1 - i$ . لذلك :

$$11 + 7i = (3 + 7i)(1 - i) + (1 + 3i) \qquad (1)$$

هي الخطوة الأولى في خوارزمية إقليدس . بعد ذلك :

$$(3 + 7i)(1 + 3i) = (3 + 7i)(1 - 3i)/10$$
$$= (24 - 2i)/10$$

والعنصر الأقرب له في $R$ هو 2 . لذلك تكون الخطوة الثانية في خوارزمية إقليدس هي :

$$3 + 7i = (1 + 3i).2 + (1 + i) \qquad (2)$$

وأخيرا

$$(1 + 3i) = (1 + i)(2 + i) \qquad (3)$$

وبالتالي $1 + i$ هو عامل مشترك أعلى للعنصرين $3 + 7i$ و $11 + 7i$ .

يمكن التعبير عن $1 + i$ كتركيب خطي لـ $3 + 7i$ و $11 + 7i$ كما يلي .

من المعادلة (٢) نحصل على :

$$(1 + i) = (3 + 7i) - (1 + 3i).2$$

ونعوض عن $1 + 3i$ من المعادلة (1) فنحصل على :

$$1 + i = -2(11 + 7i) + (3 - 2i)(3 + 7i)$$

**ملاحظة**

لقد سبق أن لاحظنا أن $K[x]$ حلقة إقليدية إذا كان $K$ حقلا ، وبصفة خاصة $\mathbb{Q}[x]$ حلقة إقليدية . أيضا :

حلقة إقليدية $\Leftarrow$ حلقة تامة رئيسة $\Leftarrow$ حلقة تحليل وحيد .

من الطبيعي أن يثار السؤال: هل حلقات كثيرات الحدود، بصورة عامة، تمثل حلقات إقليدية – مثلا ماذا عن $\mathbb{Z}[x]$؟ في الحقيقة $\mathbb{Z}[x]$ ليست حلقة تامة رئيسة (انظر التمرين ٨)، (وبالتالي ليست حلقة إقليدية). من ناحية أخرى، توجد مبرهنة مهمة لجاوس تنص على أنه: إذا كانت $R$ حلقة تحليل وحيد فتكون كذلك الحلقة $R[x]$ حلقة تحليل وحيد، وإذن $\mathbb{Z}[x]$ حلقة تحليل وحيد، وهكذا أيضا (باستخدام الاستقراء على $n$) تكون حلقة كثيرات الحدود

$$K[x_1, ..., x_n] = (K[x_1, ..., x_{n-1}]) [x_n])$$

لن نثبت هذه النظرية حيث لا نحتاج إليها في هذا الكتاب. بالرغم من أن برهان هذه النظرية طويل لكنه ليس صعبا بشكل خاص، يستطيع القارئ الذي يرغب في الإطلاع عليه الاستفادة، مثلا، من المرجع [Jacobson, 1951] صفحة ١٢٦.

## تمارين على الفصل الرابع

١ - أوجد أعدادا صحيحة $a, b$ بحيث إن $17a + 25b = 1$.

٢ - في حلـقة أعداد جاوس $R$، أوجد عاملا مشتركا أعلى للعنصرين $a = 5 - i$ و$b = 2 - 2i$ وعبر عنه بالصيغة $ra + sb$، حيث $r, s \in R$. اعمل نفس الشيء للمجموعة $\{2 + i, 3 + 2i\}$.

٣ - في $\mathbb{Q}[x]$، أوجد عاملا مشتركا أعلى لكثيرتي الحدود

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1, \qquad x^2 + x + 2$$

٤ - في حلقة أعداد جاوس، عبر عن $1 - 2i$ و $27 + 6i$ كحاصلي ضرب عناصر أولية. أوجد عناصر الوحدة في هذه الحلقة.

٥ - أثبت أنه في الحلقة $\mathbb{C}[x]$ كل كثيرة حدود غير قابلة للتحليل تكون خطية، وأن كل كثيرة حدود غير قابلة للتحليل في $\mathbb{R}[x]$ تكون خطية أو تربيعية.

٦ - لتكن $R = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. أثبت أن

$$6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \text{ و } 2(1+\sqrt{-5})$$

ليس لهما عامل مشترك أعلى في $R$.

(**إرشاد:** أثبت أن أي عامل مشترك أعلى يكون معياره يساوي 12).

٧ - أثبت أن الحلقتين $\{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ و $\{a + bw : a, b \in \mathbb{Z}\}$ حيث $w = e^{2\pi i/3}$ ، مع العمليات الاعتيادية هما حلقتان إقليديتان وأوجد عناصر الوحدة في هاتين الحلقتين (انظر برهان حلقة أعداد جاوس).

٨ - أثبت أن $\mathbb{Z}[x]$ ليست حلقة تامة رئيسة وذلك باستخدام المثالي $J$ المولد بـ $x$ و $2$.

٩ - لتكن $R$ حلقة تامة. أثبت أنه إذا كانت $R$ حلقة تحليل وحيد، فإن كل زوج من عناصر $R$ له عامل مشترك أعلى. أعط مثالا يوضح أنه قد لا يمكن التعبير عن هذا العامل المشترك الأعلى كتركيب خطي للعنصرين (اللذين هو عامل مشترك أعلى لهما). كذلك (وهذا أصعب) أثبت أنه إذا كانت $R$ تحقق شرط وجود التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد وكان كل زوج من عناصر $R$ له عامل مشترك أعلى، فإن كل عنصر غير قابل للتحليل في $R$ يكون أوليا. وبالتالي فإن $R$ حلقة تحليل وحيد.

١٠ - لتكن $R \subseteq S$ حلقتين تامتين رئيستين، وليكن $a, b \in R$ و $d$ عامل مشترك أعلى لهما في $R$. أثبت أن $d$ عامل مشترك أعلى لهما في $S$.

١١ - يقال عن حلقة تامة $R$ إنها تحقق شرط السلسلة التصاعدية (ascending chain condition) على المثاليات (أو تسمى حلقة نويثرية، نسبة إلى العالمة الرياضية البارزة Emmy Noether (١٨٨٢ - ١٩٣٥))، إذا حققت ما يلي:

إذا أعطيت سلسلة تصاعدية $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$ من مثاليات $R$، فإنه يوجد عدد صحيح $n$ بحيث إن $J_n = J_{n+1} = \ldots$ أثبت أن كل حلقة تامة رئيسة هي حلقة نويثرية، وكل حلقة تامة نويثرية تحقق شرط وجود التحليل من شروط حلقة تحليل وحيد.

١٢ - لتكن $R$ حلقة تامة رئيسة، وليكن $p \in R^*$. أثبت أن الشروط التالية متكافئة:

(i) $p$ عنصر أولي.

(ii) $p$ عنصر غير قابل للتحليل.

(iii) $pR$ مثالي أعظمي في الحلقة $R$ (انظر التمرين ١٢ في الفصل الثاني).

(iv) $R/pR$ حقل.

(v) $R/pR$ حلقة تامة.

١٣ - لتكن $R$ حلقة تامة رئيسة ، S حلقة تامة ، وليكن $\phi : R \to S$ تشاكلا غامرا .
أثبت أنه إما $\phi$ تماثل أو $S$ حقل .

١٤ - لتكن $R$ حلقة إبدالية بمحايد . أثبت أنه يوجد تشاكل غامر من $R[x]$ إلى $R$ .
استنتج أن $R[x]$ حلقة تامة رئيسة إذا وفقط إذاكان $R$ حقلا .

# الفصل الخامس

## الحلقيات

سنقدم في هذا الفصل المفهوم المركزي في هذا الكتاب وهو مفهوم الحلقية على حلقة. سيتم وضع بعض الأسس الجبرية للحلقيات - من تعريف البنية إلى دراسة البنى الجزئية والتشاكلات وبنى القسمة وإعطاء كثير من الأمثلة. سيلاحظ القارئ أن هذه الطريقة بداية مهمة لتسهيل الصعوبات التي ستواجهنا ونأمل ألا يخيب رجاؤه إذا لم يتم إثبات مبرهنات تتميز بعمق النتيجة وحذاقة البرهان في هذه المرحلة.

### ١ - تعريف الحلقية على حلقة

الحلقية بنية متعددة الاستعمالات وتظهر في كثير من الأشكال غير العادية، ولها قدرة على توضيح الميزات المهمة لأنواع واسعة من البنى الرياضية. وتتميز بوجود تطبيقات لها في كثير من الفروع الرياضية من نظرية الزمر إلى التبولوجيا، كما أنها أداة لا يمكن الاستغناء عنها في فروع معينة من الرياضيات. وهي تزودنا كذلك بلغة وطريقة، للنظر إلى الأشياء، تختصران المفاهيم وتعبران بجمالية عنها وتوضحان وحدة الرياضيات. في حالة تبيان أن ذلك مقدمة لدعاية عن فكرة رياضية جديدة، فإنه يجب أن نوضح أن الحلقيات لها عيوب عامة؛ مثل غياب مبرهنات ذات عمق حقيقي، كما أنها تحتاج إلى جهد كبير لكي يتم الحصول على نتائج مفيدة في حالات خاصة. وسنترك ذلك للقارئ كي يحكم بنفسه.

تظهر فكرة الحلقية عند محاولة دراسة الجبر الخطي على حلقة بدلا من حقل . سيكون أحد أهدافنا من دراسة الحلقيات هو إنقاذ ما يمكن من المبرهنات التقليدية الموجودة في الجبر الخطي ، وفي نفس الوقت سنشير إلى تحذيرات واضحة عندما لا تتحقق مبرهنات معينة أو عندما نحتاج إلى تحسينات . يستلزم التعميم تضحية ، لذلك سيتم التخلي عن الترتيب الرائع في إثبات مبرهنات الفضاءات المتجهة ، وستكون المبرهنات مشروطة بكلمات مثل «إذا» و «لكن» . ومع ذلك فإن المردود من عملية التصويب هذه سيظهر في الجزء الثالث من الكتاب ، والذي سنحصل فيه على بعض النتائج المحددة التي تتعلق بالبنية في مواضيع الزمر الإبدالية والمصفوفات اعتمادا على النتائج العامة في الحلقيات .

سنفترض أن القارئ متمكن بشكل مناسب من الجبر الخطي ، وسيتم التأكيد على النتائج المألوفة في هذا الموضوع أثناء دراستنا ، ونسترجعها باستخدام الحقل كحالة خاصة من الحلقة ، لذلك يتم تقدم القارئ في هذا الكتاب على مستويين ، وذلك من الحالة الخاصة إلى الحالة العامة ثم إلى الحالة الخاصة مرة أخرى (وهي قاعدة راسخة في تعلم الرياضيات) .

تستخدم حلقيات على حلقة بمحايد في هذا الكتاب ، ولذلك سنفرض أن كل الحلقات حلقات بمحايد ، إلا إذا ذكر العكس .

**(٥-١) تعريف**

*الحلقية على الحلقة* $R$ (R-module) *هي زمرة إبدالية* $M$ *(وبصورة شبه ثابتة ستعتبر جمعية) مع تطبيق من* $R \times M$ *إلى* $M$ *يرسل* $(r, m)$ *إلى* $r\,m$ *ويحقق الشروط التالية :*

$$r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$$
$$(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$$
$$(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$$
$$1m = m$$

*لكل* $r, r_1, r_2 \in R$ *ولكل* $m, m_1, m_2 \in M$ .

إذا سُمِّيَ ما عرف أعلاه حلقية يسرى على الحلقة $R$ سيكون أكثر دقة. ويوجد تعريف مشابه للحلقية اليمنى حيث تكتب عناصر $R$ على اليمين. في بعض الأحيان، تكون هناك حاجة إلى الحالتين معا، لكن ذلك لن يحدث في هذا الكتاب، لذلك سيكون التركيز على الحلقيات اليسرى. يفضل بعض المؤلفين حذف الشرط الرابع ولكننا سنضيفه دائما.

**ملاحظات**

١ - أول ما يلاحظ في الشروط السابقة للحلقية أنها نفس شروط الفضاء المتجه، والفرق الوحيد هو أنه يسمح لما يسمى بالعوامل بالانتماء إلى حلقة بمحايد بدلا من تقييد انتمائها إلى حقل (إذا لم تتذكر شروط الفضاء المتجه، يمكن الرجوع إلى أي كتاب في موضوع الجبر الخطي).

٢ - لتكن $M$ حلقية على $R$. لكل عنصر $r$ ينتمي إلى $R$، نعرف التطبيق $\phi(r) : M \to M$ بالقاعدة

$$\phi(r)(m) = rm \qquad (*)$$

يوضح الشرط الأول من شروط الحلقية أن $\phi(r)$ تشاكل ذاتي للزمرة الإبدالية $M$. لذلك $\phi$ تطبيق من $R$ إلى $\text{End}M$ (التي تشكل حلقة بالنسبة للجمع النقطي وتركيب التطبيقات كما تم توضيح ذلك في مثال حلقة ١٠). يوضح لنا الشرطان الثاني والثالث أن هذا التطبيق هو تشاكل حلقات كما يوضح الشرط الرابع أن $\phi$ يرسل محايد $R$ إلى محايد $\text{End}M$.

وبالعكس، نفرض أن $M$ زمرة إبدالية وأن $\phi$ تشاكل حلقات من حلقة $R$ إلى $\text{End}M$ يُرسل محايد $R$ إلى محايد $\text{End}M$. نستطيع أن نستخدم المعادلة $(*)$ لتحويل $M$ إلى حلقية على $R$. سنترك للقارئ التأكد من أن الفرضية السابقة ستجعل شروط الحلقية الأربعة متحققة.

لذلك، فإن معرفة حلقية على $R$ يكافئ معرفة وجود تشاكل من حلقة $R$ إلى حلقة التشاكلات الداخلية لزمرة إبدالية. لذلك فهما طريقتان لرؤية أو وصف نفس البنية.

٣ - نذكر أخيرا بعض النتائج البسيطة والمفيدة لتعريف حلقية $M$ على $R$: لكل $r \in R$ و $m \in M$ يلاحظ أن:

$$O_R m = O_M \quad \text{(i)}$$

$$rO_M = O_M \quad \text{(ii)}$$

$$(-r)m = -(r\,m) = r(-m) \quad \text{(iii)}$$

يمكن التأكد من هذه النتائج بسهولة باستخدام شروط الحلقية بنفس الطريقة كما في برهان مأخوذة (١-٢).

**أمثلـــة**

١ - يلاحظ أن أي فضاء متجه على حقل $K$ يشكل حلقية على $K$.

٢ - يمكن اعتبار أي زمرة إبداليه $A$ كحلقية على $\mathbb{Z}$ بطريقة طبيعية. حيث لو كتبت $A$ كزمرة جمعية، فإننا لاحظنا في بداية الفصل الثاني كيف تم تعريف التطبيق $(n, a) \to na$ من $\mathbb{Z} \times A$ إلى $A$ وقد أشير إلى تحقيق هذا التطبيق شروط الحلقية الأربعة.

٣ - كل حلقة (بمحايد طبعا) يمكن التفكير فيها كحلقية على نفسها. نعتبر الزمرة الجمعية $R^+$ للحلقة $R$ كزمرة جمعية ونعرف التطبيق $R \times R^+ \to R^+$ بـ $(r, s) \to rs$. في هذه الحالة تكون المجموعتان $R$ و $M$ هما نفس الشيء، ولن يسبب هذا أي صعوبة تذكر. يتحقق الشرطان الأول والثاني من شروط الحلقية من قانوني التوزيع ويتحقق الشرط الثالث من خاصية التجميع بينما الشرط الرابع ما هو إلا خاصة المحايد للحلقة $R$. عندما نريد أن نؤكد على كون $R$ حلقية (يسرى) على $R$ بدلا من كونها حلقة، نوضح ذلك بأن نرمز لها بالرمز $_R\mathrm{R}$. لذلك توجد ثلاث طرق للنظر للحلقة - كحلقة وكزمرة جمعية إبدالية وكحلقية على نفسها. ويلاحظ أنه في كثير من الحالات تكون الطرق الثلاث لتصور الحلقية مهمة في نفس الوقت.

٤ - لقد رأينا كيف نستطيع النظر إلى فضاء متجه $V$ على حقل $K$ كحلقية على $K$. إذا أعطينا تحويلا خطيا من $V$ إلى نفسه، فإنه يمكن جعل $V$ حلقية على $K[x]$.

لكي نوضح ذلك سنذكر أولا بعض الحقائق الأولية حول التحويلات الخطية .
إذا كـان $\alpha, \beta$ تحويلين خطيين من $V$ إلى $V$ وكـان $\lambda \in K$ ، فتعرف التطبيقات $\alpha + \beta, \alpha\beta, \lambda\alpha$ من $V$ إلى $V$ كما يلي :

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(v) &= \alpha(v) + \beta(v)\\ (\alpha\beta)(v) &= \alpha(\beta(v))\\ (\lambda\alpha)(v) &= \lambda(\alpha(v))\end{aligned}$$

حيث $v$ متجه اختياري من $V$ . يمكن بسهولة إثبات أن كلا من هذه التطبيقات يمثل تحويلا خطيا لـ $V$ وأن العمليات الموضحة تجعل $\mathrm{End}V$ ، مجموعة كل التحويلات الخطية لـ $V$ ، جبرية على الحقل $K$ (انظر نهاية الفصل الثالث) . لذلك ،

إذا كان $\alpha \in \mathrm{End}V$ ، $I$ يرمز لمحايد $\mathrm{End}V$ وكان $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ ، فإن العنصر $a_0 I + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n$ عنصر حسن التعريف من $\mathrm{End}V$ . نرمز له بالرمز $f(\alpha)$ . تأثيره على عنصر اختياري $v$ من $V$ (حسب تعريف العمليات في $\mathrm{End}V$) معطى كما يلي :

$$f(\alpha)(v) = a_0 v + a_1\alpha(v) + \ldots + a_n\alpha^n(v)$$

حيث

$$\alpha^n(v) = \alpha(\alpha(\ldots(\alpha(v))\ldots))$$

وحيث $\alpha$ مكررة $n$ من المرات .

الآن ليكن $\alpha$ عنصرا ثابتا في $\mathrm{End}V$ . نحصل على تطبيق من $K[x] \times V$ إلى $V$ بتعريف

$$fv = f(\alpha)(v)$$

حيث $f \in K[x]$ و $v \in V$ وندعي أن هذا التطبيق يجعل $V$ حلقية على $K[x]$ . سنتأكد من ذلك بالتفصيل لأن الحلقيات من هذا النوع ستؤدي دورا مهما في الجزء الثالث من الكتاب . وتكون الطريقة الأبسط في التحقق باستخدام «الخاصة الشاملة لحلقات كثيرات الحدود» ، الموضحة في تمرين (١٢) من تمارين

الفصل الثالث. نلاحظ أن التطبيق $f \to f(\alpha)$ هو تشاكل حلقات من $K[x]$ إلى $\mathrm{End}V$ وبالتالي فهو يجعل $V$ حلقية على $K[x]$ بنفس الطريقة الموضحة في ملاحظة ٣ المذكورة أعلاه. ومع ذلك، إلى الذين يرغبون التحقق فإننا سنعمل ذلك بالحساب المباشر.

**الشرط الأول:**

$$f(v_1 + v_2) = f(\alpha)(v_1 + v_2)$$ (حسب التعريف)

$$= f(\alpha)(v_1) + f(\alpha)(v_2)$$ (لأن $f(\alpha)$ تحويل خطي)

$$= fv_1 + fv_2$$ (حسب التعريف)

**الشرط الثاني:**

نفرض أن $g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ و $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ عنصران من $K[x]$ (حيث قد تكون بعض المعاملات صفرا)، ونفرض أن $v \in V$. عندئذ يكون

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

وبالتالي

$$(f + g)v = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) \alpha^i (v)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i (v) + \sum_{i=0}^{n} b_i \alpha^i (v)$$

$$= fv + gv$$ (حسب التعريف)

**الشرط الثالث:**

باستخدام نفس الرموز نلاحظ أن

$$fg = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)x^k$$

وبالتالي :

$$(fg)v = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)\alpha^k(v) \qquad \text{(حسب التعريف)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \alpha^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_j \alpha^j(v)\right)$$

$$= f(\alpha)\ (g(\alpha)(v))$$

$$= f(gv)$$

**الشرط الرابع:** مباشر .

يلاحظ أن البناء يعتمد أولا على تحديد $\alpha$ معينة . وتؤدي تحويلات خطية مختلفة من نوع $\alpha$ إلى تطبيقات مختلفة من $K[x] \times V$ إلى $V$ وبالتالي إلى حلقيات مختلفة . نتكلم عن الحلقية على $K[x]$ التي بنيت - كما وضحنا أعلاه - كحلقية على $K[x]$ بنيت من $V$ بواسطة $\alpha$ .

٥ - إذا كانت A أية زمرة إبدالية ، فإن المجموعة $\mathrm{End}A$ يمكن أن تعطى بنية حلقة كما في مثال حلقة (١٠) ، وتصبح $A$ حلقية على $\mathrm{End}A$ إذا عرّفنا $\alpha a = \alpha(a)$ لكل $a \in A$ ولكل $\alpha \in \mathrm{End}A$ .

## ٢ - الحلقيات الجزئية

الحلقية الجزئية (submodule) من حلقية $M$ على $R$ هي مجموعة جزئية $N$ من $M$ بحيث إن قيد عمليات $M$ على $N$ يجعل $N$ حلقية على $R$ . هذه العمليات من نوعين . عمليتا الزمرة الإبدالية + ، - وعملية الضرب من اليسار بعناصر $R$ . لذلك نحصل على التعريف :

**(٥-٢) تعريف**

*لتكن $M$ حلقية على $R$. نقول عن مجموعة جزئية $N$ من $M$ إنها حلقية جزئية من $M$ إذا حققت الشرطين التاليين:*

(i) $N$ تشكل زمرة جزئية من $M$.

(ii) $r\, n \in N$ لكل $r \in R$ ولكل $n \in N$.

يقول الشرط الثاني إن التطبيق $R \times M \to M$ الذي يعطي بنية الحلقية لـ $M$ يرسل $R \times N$ إلى $N$. من الواضح أن شروط الحلقية الأربعة تتحقق، وبالتالي فإن $N$ حلقية على $R$. النتيجة التالية مباشرة.

**(٥-٣) مأخوذة**

*إذا كانت $M$ حلقية على $R$، فإن أية مجموعة جزئية $N$ من $M$ تكّون حلقية جزئية إذا وفقط إذا كان*

(i) $0 \in N$.

(ii) $n_1, n_2 \in N \Rightarrow n_1 - n_2 \in N$.

(iii) $n \in N, r \in R \Rightarrow r\, n \in N$.

**أمثلـــــة**

١ - لكل حلقية $M$ على $R$ حلقيتان جزئيتان هما $\{0\}$ و $M$.

٢ - إذا كانت $A$ زمرة إبدالية معتبرة كحلقية على $\mathbb{Z}$ كما هو موضح سابقا، فإن الحلقيات الجزئية من $A$ هي بالضبط الزمر الجزئية. ذلك لأنه إذا كان $n \in \mathbb{Z}$ وكان $a \in A$، فإن

$$na = \pm (a + \ldots + a)$$

مع $|n|$ من المرات من $a$، وهذا ينتمي إلى أية زمرة جزئية تحوي $a$.

٣ - في فضاء متجه، على حقل $K$، إذا اعتبر حلقية على $K$، فإن الحلقيات الجزئية هي الفضاءات الجزئية.

٤ - إذا كانت $R$ حلقة إبدالية بمحايد، فإن الحلقيات الجزئية من $_RR$ هي بالضبط مثاليات الحلقة $R$. تسمى الحلقيات الجزئية من $_RR$، في الحالة غير الإبدالية، المثاليات اليسرى لـ $R$، ولكن لن نحتاج إلى الإشارة إليها في هذا الكتاب.

٥ - نفرض أن $V$ فضاء متجه على الحقل $K$، ونفرض أن $\alpha \in \mathrm{End}V$ ونجعل $V$ حلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$. نفرض أن $U$ حلقية جزئية من $V$ على $K[x]$. عندئذ بالأخذ في الاعتبار تأثير كثيرات الحدود الثابتة، نرى أن $U$ يجب أن يكون فضاء جزئيا من $V$. بالإضافة إلى ذلك، لما كان $U$ مغلقا تحت تأثير الضرب بـ $x$ فإننا نجد أن:

$$\alpha(U) \subseteq U \qquad (*)$$

وبالعكس، أي فضاء جزئي $U$ من $V$ يحقق (*)، يحقق أيضا:

$$a_0 v + a_1 \alpha(v) + \ldots + a_n \alpha^n(v) \in U$$

لكل $a_i \in K$، ولكل $v \in U$، وبالتالي فإن $U$ حلقية جزئية على $K[x]$ من $V$.

في الجبر الخطي، يسمى الفضاء الجزئي، الذي يحقق (*)، بفضاء جزئي لامتغير (invariant) بالنسبة إلى $\alpha$، لذلك فإن الحلقيات الجزئية من $V$ المعتبرة كحلقيات على $K[x]$ بواسطة $\alpha$، هي بالضبط الفضاءات الجزئية اللامتغيرة بالنسبة إلى $\alpha$ في $V$.

يستطيع القارئ أن يتأكد بسهولة باستخدام المأخوذة (٥-٣) أن تقاطع أي مجموعة غير خالية من حلقيات جزئية من حلقية $M$ على $R$ يكون حلقية جزئية من $M$. ويعطينا هذا مبررا التعريف الحلقية الجزئية المولدة بواسطة مجموعة جزئية من $M$.

**(٥-٤) تعريف**

*إذا كانت $X$ مجموعة جزئية من حلقية $M$ على $R$ فإن الحلقية الجزئية من $M$ المولدة بواسطة $X$ هي أصغر حلقية جزئية من $M$ تحوي $X$.*

يلاحظ أن التعريف له معنى لكون تقاطع كل الحلقيات الجزئية من $M$ التي تحوي $X$ هو نفسه حلقية جزئية تحوي $X$ وهي الأصغر بين هذه الحلقيات الجزئية. لكي نصف هذه الحلقية الجزئية بشكل أكثر وضوحا نحتاج إلى أن نقدم بعض الرموز.

## تـرمـــيز

١ - إذا كانت $M$ حلقية على $R$، وكانت $X$ مجموعة جزئية غير خالية من $M$، وكانت $S$ مجموعة جزئية غير خالية من $R$، فإننا نرمز بـ $SX$ للمجموعة

$$SX = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \, x_i : s_i \in S, \;\; x_i \in X, \;\; n \geq 1 \right\}$$

التي تتكون من كل المجاميع المنتهية من عناصر على الشكل $sx$ حيث $s \in S$ و $x \in X$. لذلك فإن $SX$ مجموعة جزئية من $M$. إذا كانت $M$ هي ${}_R R$، فإن $X$ و $S$ مجموعتان جزئيتان من $R$ وحاصل الضرب $SX$ المعرف أعلاه هو نفس حاصل الضرب على اعتبار أن $S$ و $X$ مجموعتان جزئيتان من $R$ (انظر بداية الفصل الثاني). يلاحظ أن $SX$ مغلقة تحت تأثير الجمع حسب تعريفها. إذا كانت $X$ زمرة جمعية جزئية من $M$، فإن $X$ تحوي الصفر، وبالتالي عند اختيار عنصر $s$ من المجموعة غير الخالية $S$، نجد أن $SX$ يحوي $0 = s0$. أيضا $SX$ يحوي $(-x_i)$ $(\Sigma s_i x_i) = \Sigma s_i(-x_i)$ - لأن $-x_i \in X$، وبالتالي فإن $SX$ زمرة جزئية من $M$ في هذه الحالة. بالمثل إذا كانت $S$ زمرة جزئية من $R^+$، فإن $SX$ تكون زمرة جزئية من $M$.

عندما تكون $X$ أو $S$ مجموعة تحوي عنصرا واحدا، سنكتب $sX$ بدلا من $\{s\}X$، ونكتب $Sx$ بدلا من $S\{x\}$. يستطيع القارئ أن يتأكد من أن التقارير التالية صحيحة.

(i) إذا كانت $X$ زمرة جمعية جزئية من $M$ فإن $sX = \{sx : x \in X\}$.

(ii) إذا كانت $S$ زمرة جزئية من $R^+$ فإن $Sx = \{sx : s \in S\}$.

(iii) إذا كانت $S \triangleleft R$، فإن $SX$ تكون حلقية جزئية من $M$.

٢ - سبق أن عرفنا مجموع مجموعات جزئية من حلقة، ويمكن تعريف مجموع مجموعات جزئية من حلقية على $R$ بطريقة مشابهة. فإذا كانت $L_1, \ldots, L_n$ مجموعات جزئية غير خالية من حلقية $M$ على $R$، فإننا نعرف

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + \cdots + L_n = \{ l_1 + \cdots + l_n : l_i \in L_i \}$$

حيث نفرض أن $n \geq 1$. ويكون هذا الترميز ذا أهمية خاصة عندما تكون كل من $L_i$ حلقية جزئية.

**(٥-٥) مأخوذة**

*لتكن $M$ حلقية على $R$.*

(i) *إذا كانت $L_1, \ldots, L_n$ حلقيات جزئية من $M$ $(n \geq 1)$ فإن $\sum_{i=1}^{n} L_i$ حلقية جزئية من $M$.*

(ii) *إذا كانت $X$ مجموعة غير خالية من $M$، فإن $RX$ هي الحلقية الجزئية من $M$ المولدة بواسطة $X$.*

(iii) *إذا كانت $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ مجموعة غير خالية ومنتهية من $M$،*

*فإن* $$RX = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$$

**البرهـــان**

(i) يترك برهان هذه الفقرة للقارئ.

(ii) سبق أن تحقق القارئ كون $RX$ حلقية جزئية من $M$ حيث إن الحلقة $R$ مثالي في $R$. إذا كان $x \in X$، فإن $x = 1x \in RX$، وبالتالي فإن $RX$ تحوي $X$. بالإضافة إلى ذلك، كل حلقية جزئية من $M$ تحوي $X$ يجب أن تحوي كل عنصر $rx$ $(r \in R, x \in X)$، وبالتالي تحوي كل مجموع منته لمثل هذه العناصر، فهي إذن تحوي $RX$، لذلك فإن $RX$ هي أصغر حلقية جزئيّة من $M$ تحوي $X$.

(iii) سبق أن رأينا أنه إذا كانت $x \in M$، فإن $Rx = \{rx : r \in R\}$. وإذن، من التعريف، $\sum_{i=1}^{n} Rx_i$ تتكون من كل العناصر $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n$ حيث $r_i \in R$.

لكن من تعريف $RX$ نستطيع التعبير عن أي عنصر في $RX$ بهذه الصيغة بعد إعادة تجميع الحدود، إذا لزم الأمر، واستخدام الشرط الثاني من شروط الحلقية. إذن $\sum_{i=1}^{n} Rx_i = RX$ كما هو مطلوب.

**(٥-٦) تعريفان**

*يقال إن الحلقية $M$ على $R$ مولدة نهائيا* (finitely-generated) *إذا أمكن توليدها بواسطة مجموعة منتهية من عناصرها، ويقال عنها إنها دوروية* (cyclic) *إذا أمكن توليدها بواسطة أحد عناصرها.*

من المأخوذة (٥-٥) تكون $M$ مولدة نهائيا إذا وفقط إذا وجدت مجموعة منتهية من العناصر $x_1, \ldots, x_n \in M$ بحيث إن كل $x \in M$ يمكن التعبير عنه «كتركيب خطي» $x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ للعناصر $x_i$ حيث $r_i \in R$. تكون $M$ دوروية إذا وفقط إذا كان $M = Rx$، لعنصر ما $x \in M$؛ أي أن كل عنصر من $M$ يكون على الصيغة $r x$ حيث $r \in R$ و $x$ عنصر ثابت في $M$.

**أمثلـــــة**

١ - نفرض أن $V$ فضاء متجه على حقل $K$. إن $V$ يكون مولدا نهائيا كحلقية إذا وفقط إذا كان $V$ كفضاء متجه على $K$ ذا بعد منته ويكون دورويا إذا وفقط إذا كان $\dim V = 0$ أو $\dim V = 1$.

٢ - نفرض أن $A$ زمرة إبدالية. إن $A$ تكون مولدة نهائيا كحلقية على $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كانت $A$ مولدة نهائيا كزمرة، وتكون $A$ حلقية دوروية على $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كانت زمرة دوروية.

٣ - نفرض أن $R$ حلقة إبدالية بمحايد ونفرض أن $M$ حلقية جزئية من $_RR$. إن $M \lhd R$ كما رأينا. تكون $M$ حلقية جزئية دوروية من $_RR$ إذا وفقط إذا كان $M$ مثاليا رئيسيا في $R$. وبوجه خاص $_RR = R1$ حلقية دوروية على $R$.

سيتم التحدث أكثر عن هذه المفاهيم مستقبلا.

## ٣ - التشاكلات وحلقيات القسمة

**(٥-٧) تعريف**

*لتكن $M$ و $N$ حلقيتين على $R$، يقال عن تطبيق $\theta : M \to N$ إنه تشاكل (وبشكل أكثر دقة تشاكل حلقيات على $R$ أو تشاكل على $R$) إذا حقق الشرطين التاليين:*

$$\theta(m_1 + m_2) = \theta(m_1) + \theta(m_2)$$
$$\theta(r\,m) = r\,\theta(m)$$

لكل $m, m_1, m_2 \in M$ ولكل $r \in R$ .

**ملاحظات**

١ - لاحظ أن $M$ و $N$ حلقيتان على نفس الحلقة. لا نستطيع أن نعرف تشاكل حلقيات بصورة معقولة من حلقية على $R$ إلى حلقية على $S$ عندما تكون $R$ و $S$ حلقتين مختلفتين.

٢ - يعرف كل من التشاكل المتباين والتشاكل الغامر والتماثل في الحلقيات بنفس الطريقة التي عَرِّف بها في الزمر والحلقات.

**أمثلـــة**

١ - إذا كانت $M$ و $N$ حلقيتين على $R$، فإن التطبيق الصفري الذي يرسل كل عنصر من $M$ إلى $O_N$ تشاكل حلقيات على $R$. كذلك التطبيق المحايد على $M$ تماثل ذاتي على $R$.

٢ - لتكن $A$ و $B$ زمرتين إبداليتين معتبرتين كحلقيتين على $\mathbb{Z}$، عندئذ فإن التشاكلات على $R$ من $A$ إلى $B$ هي التشاكلات من $A$ إلى $B$ كزمرتين.

٣ - ليكن $V$ فضاء متجها على $K$. إن التشاكلات الداخلية لـ $V$ على $K$ هي التحويلات الخطية من $V$ إلى نفسه. ولقد سبق أن رمزنا لهذه المجموعة بـ $\mathrm{End}V$. يفضل أن يستخدم الرمز $\mathrm{End}_K V$؛ لأنه أوضح ويميز بين $\mathrm{End}_K V$ و $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}} V$ والأخيرة هي مجموعة التشاكلات الداخلية للزمرة الجمعية لـ $V$.

٤ - لتكن $R$ حلقة بمحايد. ما هي التشاكلات الداخلية على $R$ للحلقية $_RR$؟ يلاحظ أن هذه ليست تشاكلات داخلية للحلقة حيث إن تشاكل الحلقات $\theta : R \to R$ يجب أن يحقق

$$\theta(rs) = \theta(r)\theta(s)$$

لكل $r, s \in R$، بينما التشاكل الداخلي $\phi$ للحلقية $R_R$ يجب أن يحقق
$$\phi(rs) = r\phi(s)$$
لكل $r, s \in R$. وكمثال على ذلك نأخذ $R = \mathbb{Z}$، التطبيق $\phi : n \to 2n$ هو تشاكل داخلي على $\mathbb{Z}$، ولكنه ليس تشاكل حلقات لأن $\phi(1.1) = 2 = 1.\phi(1) \neq \phi(1)\,\phi(1)$. وإذا كان $R = \mathbb{C}$ فإن التطبيق $\theta : x \to \bar{x}$ الذي يرسل كل عنصر إلى مرافقه المركب هو تشاكل داخلي للحلقة $\mathbb{C}$ ولكنه ليس تشاكلا داخليا على $\mathbb{C}$ للحلقية $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$، لأن $\theta(i.i) = \theta(-1) = -1$، بينما $i\theta(i) = i(-i) = +1$.

التفريق بين تشاكل حلقات وتشاكل حلقيات على حلقة مهم جدا ولذلك يجب إعطاء الحالات التي يظهر فيها بعض التشويش بينهما إهتماما أكثر.

إن تطوير مبادئ نظرية تشاكل الحلقيات على حلقة سيتبع الطريقة الاعتيادية باستخدام النواة، بنية القسمة، التشاكل الطبيعي... الخ وسنترك تفاصيل كثيرة للقارئ لأن النقاش يتبع مثيله في البند ٢ من الفصل الثاني مع تعديلات طفيفة تأخذ في الاعتبار التأثير من اليسار لعناصر الحلقة بدلا من الضرب المستخدم في الحلقات.

يلاحظ أولا، أنه إذا كانت $M$ و $N$ حلقيتين على $R$، وكان $\theta : M \to N$ تشاكلا على $R$، فإن $\theta$ بوجه خاص تشاكل زمر وبالتالي يوجد له نواة
$$\ker\theta = \{m \in \mathrm{M} : \theta(m) = 0\}$$
باستخدام الترميز أعلاه، يمكن إثبات ما يلي بسهولة.

**(٥-٨) مأخوذة**

(i) $\ker\theta$ *حلقية جزئية على $R$ من $M$.*

(ii) $\mathrm{im}\theta$ *حلقية جزئية على $R$ من $N$.*

وعند الاستقصاء عمّا إذا كانت كل حلقية جزئية $K$ من $M$ على $R$ هي نواة تشاكل للحلقية $M$ على $R$ يتم اكتشاف حلقية القسمة $M/K$. وهي تتكون، حسب التعريف، من كل المجموعات المشاركة

$$K + m = \{k + m : k \in K\}$$

لكل اختيارات $m$ في $M$. نلاحظ أولا أن $M/K$ زمرة إبدالية، ونجعلها حلقية على $R$ بتعريف

$$r(K + m) = K + rm$$

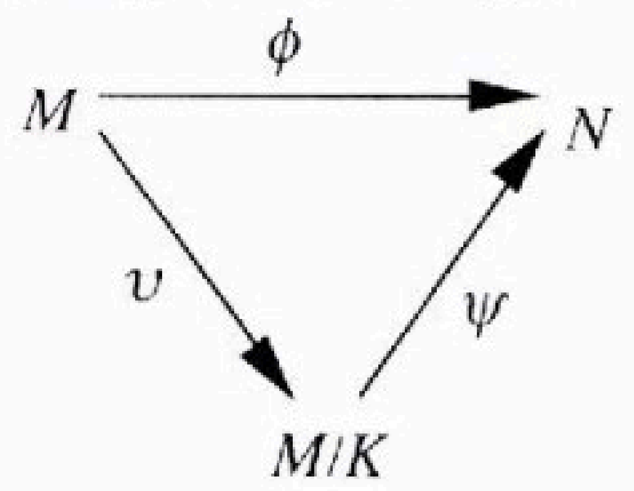
لكل $r \in R$ ولكل مجموعة مشاركة $K + m$.

إذا كان $K + m = K + m'$، فإن $m - m' \in K$، وإذن $r(m - m') \in K$، لأن $K$ حلقية جزئية، وبالتالي فإن $K + r m = K + r m'$. وعليه فإن تأثير $R$ على $M/K$ كما هو موضح أعلاه حسن التعريف. نلاحظ أن شروط الحلقية الأربعة محققة، وبذلك أعطيت المجموعة $M/K$ بنية الحلقية على $R$؛ تسمى $M/K$ حلقية القسمة لـ $M$ على $K$. نحتاج أن نعطي بعض الاهتمام للحالة الخاصة التي تكون فيها $M$ هي الحلقية $_RR$، ويكون $K$ مثاليا للحلقة $R$ للتمييز بين حلقة القسمة $R/K$ وحلقية القسمة للحلقية $_RR$ التي يرمز لها بنفس الرمز $R/K$. كما نود أن نشير إلى أن التشاكل الطبيعي $\upsilon : M \to M/K$ المعطى بالقاعدة $\upsilon(m) = K + m$ هو تشاكل غامر على $R$ ونواته $K$.

سنكتفي بذكر منطوق المبرهنات المماثلة للمبرهنات (٢-٨) إلى (٢-١٢) مع بعض التغييرات الواضحة.

**(٥-٩) مبرهنة**

لتكن $M$ و $N$ حلقيتين على $R$ و $K$ حلقية جزئية من $M$ و $\upsilon : M \to M/K$ التشاكل الطبيعي. وليكن $\phi : M \to N$ تشاكلا على $R$ تحوي نواته $K$. عندئذ يوجد تشاكل وحيد $\psi$ على $R$ من $M/K$ إلى $N$ بحيث يكون الرسم التخطيطي التالي تبادليا.



**(٥-١٠) مبرهنة**

*إذا كانت $M$ و $N$ حلقيتين على $R$ وكان $\phi : M \to N$ تشاكلا على الحلقة $R$ من $M$ إلى $N$، فإن*

$$M/\ker\phi \cong \operatorname{im}\phi$$

**(٥-١١) مبرهنة**

*إذاكانت $K$ و $L$ حلقيتين جزئيتين من حلقية $M$ على $R$ فإن*

$$K + L/K \cong L/L \cap K$$

**(٥-١٢) مبرهنة**

*إذاكانت $L$ و $K$ حلقيتين جزئيتين من حلقية $M$ على $R$ وكانت $K \subseteq L$، فإن*

$$(M/K)/(L/K) \cong M/L$$

**(٥-١٣) مبرهنة**

*إذا كانت $M$ و $N$ حلقيتين على $R$ وكان $\phi : M \to N$ تشاكلا على $R$، فإن $\phi$ و $\phi^{-1}$ تنشئان تقابلا يحافظ على الاحتواء بين مجموعة الحلقيات الجزئية من $M$ التي تحوي $\ker\phi$ ومجموعة الحلقيات الجزئية من $\operatorname{im}\phi$ .*

قد يستغرب الطالب ثاقب الفكر لماذا لا يمكن إيجاد طريقة نثبت بها كل مبرهنات التماثل المتعددة في مواضيع الزمر، الحلقات، الفضاءات المتجهة، الحلقيات، الخ مرة واحدة. يمكن أن يحدث ذلك، ولكنه يقع خارج نطاق هذا الكتاب وهو في الحقيقة ضمن مواضيع الجبر الشامل (انظر المرجع [Cohn, 1965]).

## ٤ - المجموع المباشر للحلقيات

يمكن الحصول على المجموع المباشر للحلقيات على $R$ (كلها مأخوذة على نفس الحلقة $R$) بنفس الطريقة الاعتيادية. وسيؤدي المجموع المباشر للحلقيات دورا مهما في هذا الكتاب، حيث سنقوم في الجزء الثالث من هذا الكتاب بالتعبير عن حلقية

عامة من نوع سندرسه كمجموع مباشر لحلقيات جزئية منها والتي لها بنية سهلة الدراسة وستكون في الواقع لبنات بنائية أولية للبنية الأصلية .

**(٥-١٤) تعريف**

*يقال عن الحلقية $M$ على $R$ إنها المجموع المباشر الداخلي للحلقيات الجزئية $M_1, ..., M_n$ إذا تحقق الشرطان التاليان :*

(i) $$M = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

(ii) لكل $1 \leq i \leq n$ ، $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$

نكتب $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ ، وكالعادة سنعتبر الحلقية الصفرية المجموع المباشر الداخلي لمجموعة خالية من الحلقيات الجزئية .

**(٥-١٥) مأخوذة**

*إذا كانت $M_1, ..., M_n$ حلقيات جزئية من $M$ فإن النصين الآتيين متكافئان :*

(i) *$M$ المجموع المباشر الداخلي لـ $M_i$*

(ii) *لكل $m \in M$ تمثيل وحيد على الصورة التالية :*

$$m = m_1 + ... + m_n$$

حيث $m_i \in M_i$ .

**البرهـــان**

(i) $\Leftarrow$ (ii) . حسب المتطلب الأول من تعريف المجموع المباشر الداخلي ، فإن كل عنصر $m \in M$ يمكن التعبير عنه بالصيغة $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ ، حيث $\overline{m}_i \in M_i$ . نفرض

أنه يوجد تمثيل آخر $m=\sum_{i=1}^{n}\overline{m}_i$ ، حيث $\overline{m}_i \in M_i$ فيكون :

$$m_i-\overline{m}_i=\sum_{j\neq i}\left(\overline{m}_j-m_j\right)\in M_i\cap\sum_{j\neq i}M_j=\{0\}$$

إذن $m_i=\overline{m}_i$ والتمثيل وحيد .

(ii) ⟸ (i) . يلاحظ بالتأكيد أن النص (ii) يؤدي إلى المتطلب الأول من تعريف المجموع المباشر الداخلي . إذا كان $m_i \in M_i$، فإن التعبير الوحيد عنه هو $m = 0 +...+ 0 + m + 0 +...+ 0$ حيث تظهر $m$ في الموضع رقم $i$ من المجموع . ولكن لكل عنصر في $\sum_{j\neq i}M_j$ يظهر 0 في الموضع $i$ في التعبير الوحيد عنه . إذن

$M_i\cap\sum_{j\neq i}M_j=\{0\}$ وهذا يثبت النص (i) .

تسمى العناصر $m_i$ التي تظهر في التمثيل الوحيد المشار إليه في النص الثاني من المأخوذة المذكورة أعلاه، بمركبات $m$ بالنسبة للتفريق المباشر المعطى، كما يسمى التطبيق $\pi_i : m \to m_i$ الإسقاط لـ $M$ على $M_i$؛ ويمكن النظر إلى $\pi_i$ كتطبيق من $M$ إلى نفسها، ويستطيع القارئ أن يتحقق بدون صعوبة من أن $\pi_i$ تشاكل داخلي لـ $M$ .

يمكن بناء المجموع المباشر الخارجي لحلقيات على $R$ (كلها مأخوذة على نفس الحلقة $R$) بالطريقة العادية . والمجموعة التي تبني المجموع المباشر الخارجي للحلقيات $M_1, ..., M_n$ على $R$ هي مجموعة كل العديدات $(m_1, ..., m_n)$ من النوع $n$ حيث $m_i \in M_i$ . يعرف الجمع وتأثير $R$ على عناصر المجموع المباشر الخارجي كما يلي :

$$(m_1,...,m_n)+(\overline{m}_1,...,\overline{m}_n)=(m_1+\overline{m}_1,...,m_n+\overline{m}_n)$$

$$r\,(m_1, ..., m_n) = (r\,m_1,..., r\,m_n)$$

يمكن التأكد بسهولة أن ذلك يعطي حلقية على $R$، نرمز لها كالعادة بالرمز $M_1\oplus ... \oplus M_n$ . مجموعة كل العديدات من النوع $n$، التي تكون كل مركباتها التي تختلف أرقامها عن $i$ أصفارا، هي حلقية جزئية، $\overline{M_i}$ تماثل $M_i$ ويكون $M$ المجموع

المباشر الداخلي للحلقيات $\overline{M}_i$ ، كما في حالة الحلقة . بالإضافة إلى ذلك ، فإن كل مجموع مباشر داخلي لحلقيات جزئية ، يماثل المجموع المباشر الخارجي لهذه الحلقيات .

## تمارين على الفصل الخامس

**(في التمارين التالية، $R$ حلقة إبدالية بمحايد إلا إذا ذكر غير ذلك)**

١ - لتكن $R$ الحلقة الجزئية $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ من $\mathbb{C}$ . يمكن التفكير في $R$ كحلقية على $\mathbb{Z}$ أو كحلقية على نفسها (انظر المثالين ٢ و ٣ في بداية الفصل) . أثبت أن التطبيق $a + b\sqrt{2} \rightarrow \mathrm{a + b}$ هو تشاكل داخلي للحلقية $R$ على $\mathbb{Z}$ ولكنه لا يمثل تشاكلا داخليا للحلقية على نفسها ولا يمثل تشاكلا داخليا للحلقة $R$. أثبت أن $R$ كحلقية على $\mathbb{Z}$ تماثل $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \oplus {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ .

٢ - ليكن $V$ فضاء متجها على حقل $K$ وأساسه $\{v_1, v_2\}$ و $\alpha : V \rightarrow V$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\alpha(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_2 v_1 + \lambda_1 v_2$ لكل $\lambda_1, \lambda_\omega \in K$ . أثبت أن $\alpha \in \mathrm{End}_K V$ وصف (بإيجاد أساسات) كل الحلقيات الجزئية لـ $V$ باعتباره حلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$ . قارن هذه بالحالة التي يعتبر فيها $V$ حلقية على $K$ . (تحذير : مميز $K$ قد يساوي 2 ) .

٣ - أثبت أن المجموعة الجزئية $2\mathbb{Z}$ من الحلقية $\mathbb{Z}$ على $\mathbb{Z}$ حلقية جزئية . أثبت أيضا أن $2\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}$ كحلقية ولكنها لا تماثل $\mathbb{Z}$ كحلقة .

٤ - لكي نعمم التمرين السابق ، نفرض أن $R$ حلقة تامة وأن $x$ عنصر غير صفري من $R$ . أثبت أن $R \cong Rx$ كحلقيتين على $R$ . أثبت أن $R \cong Rx$ كحلقيتين إذا وفقط إذا كان $x$ عنصر وحدة .

٥ - أثبت أن $R[x]$ حلقية مولدة نهائيا على $R$ إذا وفقط إذا كان $R = \{0\}$ . أثبت أن $\mathbb{Q}$ ليست مولدة نهائيا كحلقية على $\mathbb{Z}$ .

٦ - أوجد طريقة طبيعية تجعل $M_n(R)$ حلقية على $R$ ، وأثبت أن $M_n(R) \cong {}_R R \oplus \ldots \oplus {}_R R$ المجموع المباشر الخارجي لـ $_R R$ مع نفسها $n^2$ من المرات .

٧ - لتكن $M$ حلقية على $R$ وليكن $r$ عنصرا ثابتا من $R$ . أثبت أن التطبيق $m \rightarrow rm$ تشاكل داخلي للحلقية $M$ على $R$ . نرمز لنواة هذا التشاكل الداخلي بالرمز

$M_r$، أثبت أن $M/M_r \cong rM$ . إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$ المجموع المباشر الداخلي لحلقيتين جزئيتين، فأثبت أن $rM = rM_1 \oplus rM_2$ وأن $M_r = (M_1)_r \oplus (M_2)_r$ .

٨ - لتكن $M$ حلقية على $R$ و $M = L \oplus N$ . إذا كان $M = L_1 \oplus ... \oplus L_k$ و $N = N_1 \oplus ... \oplus N_l$ فأثبت أن $M = L_1 \oplus ... \oplus L_k \oplus N_1 \oplus ... \oplus N_l$ (كل المجاميع المباشرة داخلية). عمم هذه النتيجة.

٩ - لتكن $M_1, M_2, N_1, N_2$ حلقيات على $R$ و $M_i \cong N_i$ لـ $i = 1, 2$، أثبت أن $M_1 \oplus M_2 \cong N_1 \oplus N_2$ . هل العكس صحيح ؟

١٠ - لتكن $M$ حلقية على $R$ وضع $J = \{r \in R : rM = \{0\}\}$ . أثبت أن $J \lhd R$ وأنه يمكن جعل $M$ حلقية على الحلقة $R/J$ بطريقة طبيعية.

١١ - نفرض أن $V_1, V_2$ فضاءان متجهان على حقل $K$، نجعلهما حلقيتين على $K[x]$ بواسطة $\alpha_i \in \text{End}_K V_i$ $(i = 1, 2)$ . أثبت أن $V_1 \cong V_2$ كحلقيتين على $K[x]$ إذا وفقط إذا كان $\alpha_1 = \gamma^{-1}\alpha_2\gamma$ حيث $\gamma$ تماثل فضاءات متجهة من $V_1$ إلى $V_2$ .

١٢ - نفرض أن $M$ حلقية على $R$ وأن $E = \text{End}_R M$ هي مجموعة كل التشاكلات الداخلية على $R$ للحلقية $M$ . أثبت أن التعريفين التاليين :

$$(\eta_1 + \eta_2)(m) = \eta_1(m) + \eta_2(m)$$
$$(\eta_1\eta_2)(m) = \eta_1(\eta_2(m))$$

(حيث $m \in M$ و $\eta_1, \eta_2 \in E$) يجعلان $E$ حلقة. أثبت أن $M$ يمكن اعتبارها كحلقية على $E$ وأن كل عنصر في $R$ يعين تشاكلا داخليا على $E$ للحلقية $M$ .

١٣ - ليكن $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ مجموعا مباشرا داخليا لحلقيات جزئية، وليكن $\pi_i$ الإسقاط المرافق له على $M_i$ . أثبت أن :

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \qquad \text{(ii)} \quad \pi_i^2 = \pi_i \qquad \text{(iii)} \quad i \neq j \Rightarrow \pi_i \pi_j = 0$$

حيث يرمز 0 و 1 إلى التشاكل الداخلي الصفري والتشاكل الداخلي المحايد للحلقية $M$ على الترتيب.

نفرض أن $\pi_1, ..., \pi_n$ تشاكلات داخلية لحلقية اختيارية تحقق الشروط من (i) إلى (iii) المذكورة أعلاه ونفرض أن $M_i = \text{im}\pi_i$ . أثبت أن $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ وأن $\pi_i$ هي الإسقاطات المرافقة للمجموع المباشر .

١٤* - إذا كانت $M$ و $N$ حلقيتين على $R$ وكانت $\text{Hom}_R(M, N)$ هي مجموعة كل التشاكلات على $R$ من $M$ إلى $N$ فأثبت أن التعريف النقطي للجمع يجعل $\text{Hom}_R(M, N)$ زمرة إبدالية .

ليكن $M = M_1 \oplus M_2$ مجموعا مباشرا داخليا لحلقيتين جزئيتين وليكن $\pi_1, \pi_2$ الإسقاطين المرافقين له . أثبت أنه إذا كان $\phi \in \text{End}_R M$ فإن $\phi = \sum_{i,j=1}^{2} \pi_i \phi \pi_j$ .

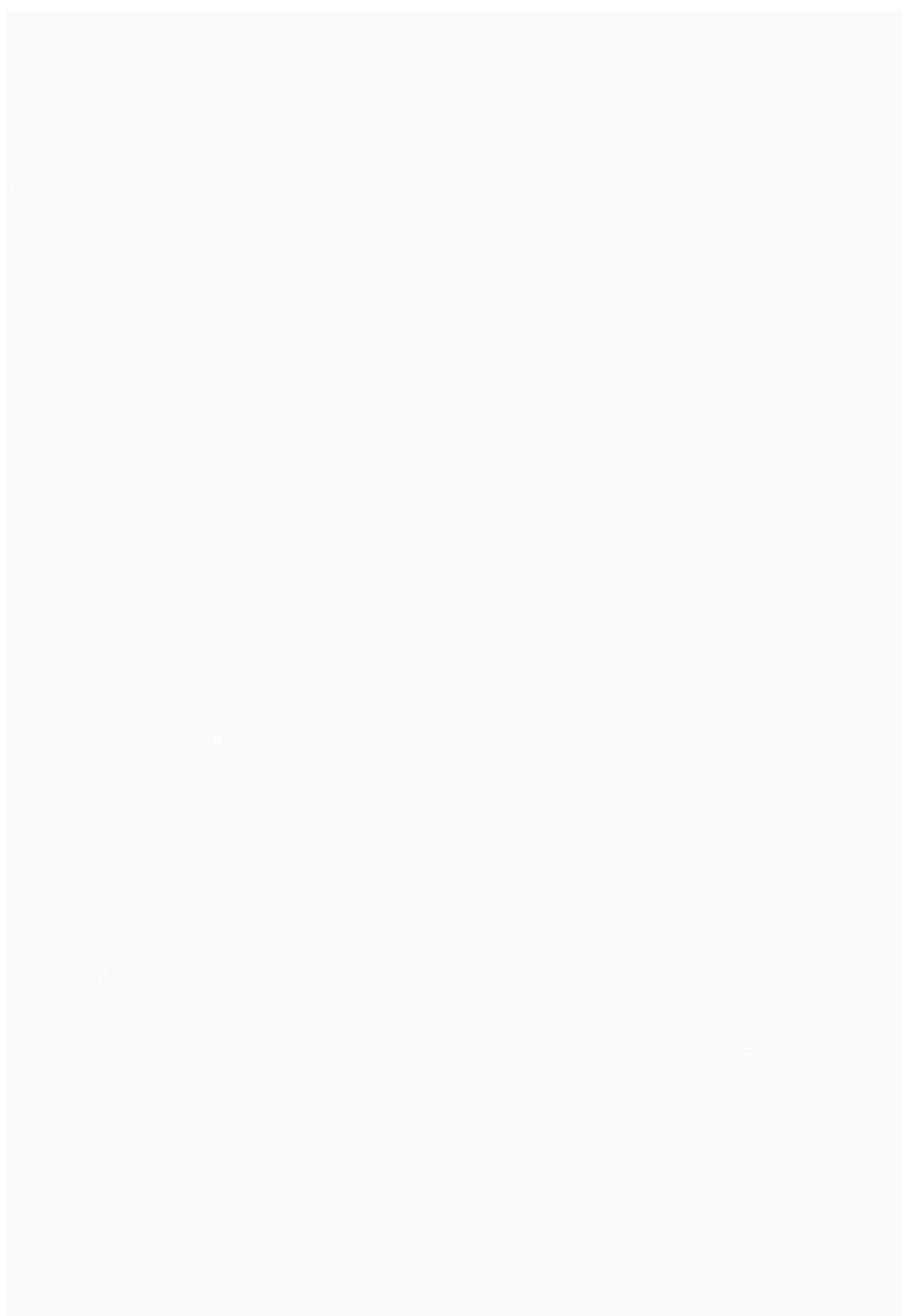
ليكن $\theta_{ij} = \pi_i \phi \pi_j \big|_{M_j}$ فإنه يكون لدينا التطبيق

$$\phi \longrightarrow \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

حيث $\phi_{ij} \in \text{Hom}_R(M_j, M_i)$ . أثبت أن عمليتي الجمع والضرب العاديتين على المصفوفات تجعلان مجموعة المصفوفات التي من هذا النمط حلقة وأن التطبيق المذكور أعلاه هو تماثل حلقات .

وضح ذلك في حالة كون $M$ فضاء متجها بعده 2 على حقل . عمم إلى الحالة التي يكون فيها عدد المجمعات يساوي $n$ .

عين $\text{End}_{\mathbb{Z}} A$ عندما $A = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ .



# الفصل السادس

## بعض أنواع الحلقيات الخاصة

إن دراسة الحلقيات بصورة عامة متنوعة ومعقدة بعض الشيء . ولكننا نستطيع تقييد بعض خصائص الحلقيات بطرق مختلفة حتى نتمكن من التركيز على أجزاء من الموضوع ولكي نتمكن من وصف ما نلاحظه بوضوح أكثر . سنعطي عناية خاصة في هذا الفصل لعدة ميزات للحلقيات تجعل دراستها ممتعة . ولما كان هدف الكتاب ليس إعطاء معالجة شاملة لنظرية الحلقيات بل توضيح قيمة الحلقيات في زاوية صغيرة من موضوع الجبر الحديث ، فإنه قد تم تقييد الاختيار معتمدين كلية على احتياجاتنا فيما بعد .

### ١ – تفاصيل أكثر عن الحلقيات المولدة نهائيا

سبق أن تعرفنا على الحلقيات المولدة نهائيا في البند ٢ من الفصل الخامس . نتذكر أن حلقية $M$ على $R$ تكون مولدة نهائيا إذا وفقط إذا كان يوجد عدد منته $m_1, \ldots, m_n$ من عناصر $M$ بحيث إن كل عنصر $m \in M$ يمكن التعبير عنه (قد يكون ذلك بعدة طرق) كتركيب خطي :

$$m = r_1 m_1 + \ldots + r_n m_n$$

حيث المعاملات $r_i \in R$ . سيكون من المفيد أن نعرف كيف تسلك خاصة «مولدة نهائيا» تحت تأثير العمليات على الحلقيات والتي سبق أن قدمت في الفصل السابق .

**(٦-١) مأخوذة**

*لتكن $M$ حلقية على $R$. عندئذ يكون :*

(i) *إذا كانت $M$ مجموعا لعدد منته من الحلقيات الجزئية المولدة نهائيا فإن $M$ مولدة نهائيا .*

(ii) *إذا كان من الممكن أن تولد $M$ بواسطة $s$ من عناصرها ، وكانت $N$ حلقية جزئية من $M$ ، فإن $M/N$ يمكن أن تولد بواسطة $s$ من عناصرها .*

(iii) *إذا كانت $M = M_1 \oplus M_2$ ، وكانت $M$ مولدة بواسطة $s$ من عناصرها ، فإن $M_1$ يمكن أن تولد بواسطة $s$ من عناصرها .*

**البرهـــــان**

(i) واضح .

(ii) حسب الفرض يوجد $s$ من عناصر $M$ ولتكن $m_1, ..., m_s$ بحيث إن كل عنصر $m \in M$ يكون له الصيغة $m = \sum_{i=1}^{s} r_i m_i$ ، حيث $r_i \in R$ . وبذلك $N + m = \sum_{i=1}^{s} r_i (N + m_i)$ الذي يوضح أن $N + m_1, ..., N + m_s$ تولد $M/N$ .

(iii) باستخدام (٥ - ١١) نحصل على

$$M/M_2 = (M_1 \oplus M_2)/M_2 \cong M_1/(M_1 \cap M_2) = M_1/\{0\} \cong M_1$$

الآن حسب (ii) يمكن أن تولد $M/M_2$ بواسطة $s$ من عناصرها ، لذلك $M_1$ يمكن أن تولد بواسطة $s$ من عناصرها .

بالرغم من أن كل مجمع مباشر من حلقية مولدة نهائيا يكون مولدا نهائيا إلا أنه يلاحظ أن حلقيات جزئية من حلقية مولدة نهائيا ليس من الضروري أن تكون مولدة نهائيا . قارن ذلك مع الفضاء المتجه ، حيث كل فضاء جزئي من فضاء ذي بعد منته يكون ذا بعد منته .

**مثـــال**

لتكن $R$ حلقة كل التطبيقات $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (حيث عمليات هذه الحلقة عمليات نقطية كما في مثال حلقة (٨)) . إن $R$ حلقة إبدالية بمحايد حيث المحايد هو التطبيق الذي يرسل كل عنصر في $\mathbb{R}$ إلى 1 . إذن $M = {}_R R$ حلقية دوروية وبالتالي فهي بالتأكيد مولدة نهائيا .

لتكن $N$ مجموعة كل $f \in R$ الذي يتلاشى خارج فترة منتهية ما ؛ أي $f \in N$ إذا وفقط إذا كان يوجد عدد صحيح $n \geq 0$ ، يعتمد بالطبع على $f$ ، بحيث إن $f(x) = 0$ طالما كان $n < |x|$ . من الواضح أنه إذا كان $f, g \in N$ فإن $f - g \in N$ وأيضا إذا كان $h \in R$ فإن $hf \in N$ لأن $hf$ يتلاشى طالما كان $f$ يتلاشى . بالإضافة إلى ذلك ، إن التطبيق الصفري 0 ينتمي إلى $N$ . إذن $N$ حلقية جزئية من $M$ .

لتكن $\{f_1, ..., f_k\}$ مجموعة منتهية من الدوال في $N$ ، إذن لكل $i$ يوجد عدد صحيح $n_i$ بحيث إن $f_i(x) = 0$ طالما كان $|x| > n_i$ . إذا كان $n = \max n_i$ ، فإن كلا من $f_1, ..., f_k$ يتلاشى خارج $[-n, n]$ . وبالتالي كل تركيب خطي $\Sigma h_i f_i$ $(h_i \in R)$ يتلاشى خارج $[-n, n]$ . إذن $f_1, ..., f_k$ لا تولد $N$ ؛ فمثلا الدالة التي تأخذ القيمة 1 عند كل نقطة من $[-(n+1), (n+1)]$ والقيمة صفر خارج هذه الفترة تنتمي إلى $N$ ، ولكنها ليست تركيبا خطيا لـ $f_i$ . لقد أثبتنا إذن أن $N$ ليست مولدة نهائيا .

ليس من الصعوبة استبدال الحلقة $R$ بحلقات أصغر ، مثلا حلقة الدوال التي لها مشتقات من جميع الرتب ، من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ .

## ٢ - حلقيات الفتل

**(٦-٢) تعريف**

*يقال عن عنصر $m$ من حلقية $M$ على $R$ إنه عنصر فتل إذا وجد عنصر غير صفري $r \in R$ بحيث إن $r\,m = 0$ ، ويقال عن حلقية إنها حلقية فتل* (torsion module) *إذا كان كل عناصرها عناصر فتل . وعلى النقيض من ذلك ، تسمى حلقية عديمة الفتل* (torsion-free module) *إذا كان لا يوجد فيها عناصر فتل غير صفرية . يسمى العنصر عنصرا عديم الفتل إذا لم يكن عنصرفتل ؛ أي أن $m$ يكون عنصرا عديم الفتل*

*إذا وفقط إذا كان $r\,m = 0$ يقتضي أن $r = 0$ . لاحظ أنه في أية حلقية على حلقة غير صفرية، يكون الصفر دائما عنصر فتل .*

**(٦-٣) مأخوذة**

*لتكن $R$ حلقة إبدالية بمحايد، ولتكن $M$ حلقية على $R$. عندئذ، لكل $m \in M$ تكون المجموعة*

$$\mathbf{o}(m) = \{r \in R : r\,m = 0\}$$

*مثاليا في الحلقة $R$.*

**البرهـــان**

من الواضح أن $0 \in \mathbf{o}(m)$ حسب ملاحظة (٣) في بداية الفصل الخامس . نفرض أن $r_1, r_2 \in \mathbf{o}(m)$ وأن $r \in R$ . يجب أن نثبت أن $r_1 - r_2, r\,r_1$ ينتميان إلى $\mathbf{o}(m)$ . الآن

$(r\,r_1)\,m = r\,(r_1\,m) = r\,0 = 0$ و $(r_1 - r_2)m = r_1\,m - r_2\,m = 0 - 0 = 0$

كما هو مطلوب (كم من شروط الحلقيات استخدم؟)

**(٦-٤) تعريف**

*يسمى $\mathbf{o}(m)$ مثالي الترتيب (order ideal) للعنصر $m$.*

**ملاحظات**

١ - باستخدام التعريف السابق، يكون عنصر من $M$ عنصر فتل إذا وفقط إذا كان مثالي الترتيب له غير صفري .

٢ - في الحلقات العامة نستطيع فقط أن نقول عن $\mathbf{o}(m)$ إنه مثالي أيسر .

**أمثلـــة**

١ - لنعتبر الزمرة الدوروية $\mathbb{Z}_3 = \{[0]\,,[1]\,,[2]\}$ . لكون $\mathbb{Z}_3$ زمرة إبدالية فيمكن اعتبارها كحلقية على $\mathbb{Z}$ بطريقة اعتيادية ؛ لنعين $\mathbf{o}([1])$. لما كان $n[1] = [n]$ ،

فإن $n \in \mathbf{o}([1])$ إذا وفقط إذا كان $3|n$. وعليه فإن $\mathbf{o}([1]) = 3\mathbb{Z}$. إذن، العنصر $[1]$، الذي له الرتبة 3 كعنصر من زمرة، يكون مثالي الترتيب له المثالي من $\mathbb{Z}$ المولد بواسطة 3 (وأيضا بواسطة $-3$). يستطيع القارئ أن يتأكد أيضا أن $\mathbf{o}([2]) = 3\mathbb{Z}$.

بصفة عامة إذا كانت $A$ زمرة إبدالية اختيارية معتبرة كحلقية على $\mathbb{Z}$، فأي عنصر من $A$ يكون دوريا (أي له رتبة منتهية كعنصر من زمرة) إذا وفقط إذا كان مثالي الترتيب له غير صفري؛ تنطبق في هذه الحالة رتبة العنصر كعنصر من الزمرة $A$ مع المولد الموجب لمثالي الترتيب للعنصر. وتكون رتبة العنصر لا نهائية إذا وفقط إذا كان مثالي الترتيب للعنصر هو المثالي الصفري. يلاحظ أن مفهوم «مثالي الترتيب» يعمم بسهولة إلى حلقية على حلقة إبدالية اختيارية بينما مفهوم «رتبة عنصر» لا يعمم.

٢ - إذا اعتبر الفضاء المتجه $V$ على حقل $K$ كحلقية على $K$، فإنها تكون عديمة الفتل، لأنه إذا كان $0 \neq \mu \in K$ وكان $\mu v = 0$ حيث $v \in V$، فإن

$$0 = \mu^{-1}\, 0 = \mu^{-1}\,(\mu v) = 1v = v$$

وإذن 0 متجه فتل وحيد في $V$. إلا أننا سنرى فيما بعد أنه إذا كان $V$ فضاء متجها على $K$ ذا بعد منته، معتبرا كحلقية على $K[x]$ بواسطة تحويل خطي $\alpha$، فهو حلقية فتل!

٣ - إذا كانت $R$ حلقة تامة، فإن الحلقية ${}_R R$ تكون عديمة الفتل لأنه إذا كان $r_s = 0$ وكان $r \neq 0$ فإن $s = 0$، وإذن صفر ${}_R R$ هو عنصر فتل وحيد فيها.

### (٦-٥) مبرهنة

إذا كانت $M$ حلقية على حلقة تامة $R$، وكانت $T$ ترمز لمجموعة عناصر فتل $M$، فإن $T$ حلقية جزئية من $M$ وإن حلقية القسمة $M/T$ عديمة الفتل.

### البرهـــان

من الواضح أن $0 \in T$. نفرض أن $t_1, t_2 \in T$. حسب التعريف يوجد عنصران $r_1, r_2 \in R^* = R\backslash\{0\}$ بحيث إن $r_i t_i = 0$، $i = 1, 2$. إذن

$$r_1 r_2 (t_1 - t_2) = (r_2 r_1)\, t_1 - (r_1 r_2)\, t_2 = r_2 (r_1 t_1) - r_1 (r_2 t_2)$$
$$= r_2 0 - r_1 0 = 0$$

لما كانت $R$ ليس لها قواسم للصفر، فإن $r_1 r_2 \in R^*$ وبالتالي $t_1 - t_2 \in T$. أخيرا إذاكان $r \in R$ فإن

$$r_1 (r\, t_1) = r (r_1\, t_1) = r0 = 0$$

وعليه فإن $r\, t_1 \in T$. وإذن باستخدام (٥-٣) تكون $T$ حلقية جزئية من $M$.

لكي نثبت أن $M/T$ عديمة الفتل نفرض أن $m + T \in M/T$ وأنه يوجد عنصر غير صفري $r \in R$ بحيث إن $r(m + T) = T$. عندئذ يكون $r\, m \in T$ وبالتالي يوجد $s \in R^*$ بحيث إن $s(r\, m) = 0$. ولكن $s(rm) = (sr)m$. لما كانت $R$ حلقة تامة فإن $sr \in R^*$ وبالتالي $m \in T$. إذن $m+T = T$ والصفر في $M/T$ هو عنصر فتل وحيد فيها. إذن $M/T$ عديمة الفتل.

## ٣ - الحلقيات الحُرَّة

إن مفهوم الحلقية الحرة على حلقة يماثل مفهوم الفضاء المتجه على حقل بشكل أفضل من مفهوم حلقية اختيارية. في الحقيقة، سنرى أن كل حلقية على حقل هي حلقية حرة، لذلك لم يبرز أبدا مفهوم «فضاء متجه حُرّ» على نحو بيِّن في الجبر الخطي. ومن ناحية أخرى بالرغم من كون الحلقيات الحرة تشابه كثيرا الفضاءات المتجهة فإننا نحتاج إلى الاحتراس من الشعور بالأمان، الناتج عن هذا التشابه، والذي لا يمكن دائما تبريره.

ستؤدي الحلقيات الحرة دورا كبيرا في تحليل بنية المبرهنات الرئيسة. سيتضح أن كل حلقية هي صورة حلقية حرة تحت تأثير تشاكل، وباستخدام هذه الحقيقة وبربطها بمبرهنات التشاكل، نستطيع أن نجيب عن أسئلة حول الحلقيات بصفة عامة بترجمة هذه الأسئلة إلى أسئلة حول حلقيات القسمة لحلقيات حرة. وهذه بدورها يمكن دراستها بفحص الحلقيات الجزئية التي تظهر كأنوية لها.

**(٦-٦) تعريف**

*لتكن $M$ حلقية على $R$ ولتكن $X$ مجموعة جزئية من $M$. نقول إن $X$ تولد $M$ بحُرِّية (generates M freely) إذاكان:*

(i) $X$ تولد $M$ (كحلقية على $R$).

(ii) كل تطبيق من $X$ إلى حلقية على $R$ يمكن تمديده إلى تشاكل على $R$. وبشكل أكثر وضوحا، إذاكانت $N$ حلقية على $R$ وكان $\phi : X \to N$ تطبيقا، فإنه يوجد تشاكل على $R$، $N$ ، $\psi : M \to N$ ، بحيث إن $\psi(x) = \phi(x)$ لكل $x \in X$.

كل حلقية على $R$ مولدة بحرية بواسطة مجموعة جزئية تسمى حلقية حرة (free module). كل مجموعة مولدة بحرية لحلقية $M$ على $R$ تسمى أساسا (وأحيانا أساسا حرا) للحلقية $M$.

**ملاحظات**

١ - إن التشاكل الممدد $\psi$ وحيد لأنه إذا كان $\psi$ و $\psi'$ تشاكلين ممددين للتطبيق $\phi$، فإن المجموعة $\{m \in M : \psi(m) = \psi'(m)\}$ تكون حلقية جزئية من $M$. لما كانت هذه المجموعة تحوي $X$ و $X$ تولد $M$، فيجب أن تكون هذه المجموعة هي $M$. إذن $\psi = \psi'$.

٢ - لاحظ أن الحلقية الصفرية تولد بحرية بواسطة المجموعة الخالية.

لقد اخترنا هذا التعريف المجرد نوعا ما للحرية لربطه بتعريف الحرية في موضوعات أعم. ومع ذلك، وحتى يتم فهم الحلقيات الحرة فإننا نحتاج إلى وصف ملموس لها.

**(٦-٧) تعريف**

*يقال عن مجموعة جزئية منتهية غير خالية $\{m_1, \ldots, m_t\}$ من حلقية $M$ على $R$ إنها مرتبطة خطيا (غير مستقلة خطيا (linearly dependent)) إذا وجدت عناصر $r_i \in R$، ليست كلها أصفارا، بحيث إن $\sum_{i=1}^{t} r_i m_i = 0$. وإلا يقال عنها إنها مجموعة مستقلة خطيا (linearly independent) وفي هذه الحالة، عندما يكون $\sum_{i=1}^{t} r_i m_i = 0$ فإنه يجب أن يكون $r_1 = \ldots = r_t = 0$.*

من المناسب أن نشير إلى أن المجموعة الخالية تعتبر مستقلة خطيا. لغرض اكتمال الموضوع (بالرغم من أننا لن نستخدم ذلك) نذكر أنه يقال عن مجموعة غير منتهية $X$ من عناصر $M$ إنها مستقلة خطيا إذا كانت كل مجموعة جزئية منتهية من $X$ مستقلة خطيا.

وهكذا تكون كل مجموعة جزئية من مجموعة مستقلة خطيا مستقلة خطيا، وأيضا تكون كل مجموعة جزئية تحوي الصفر غير مستقلة خطيا، إلا إذا كانت $R = \{0\}$.

سنضع الآن تعريف الحرية بشكل أوضح.

**(٦-٨) مبرهنة**

*لتكن $M$ حلقية على $R$ ولتكن $\{m_1, ..., m_s\}$ مجموعة جزئية منتهية من $M$. إن التقارير التالية متكافئة:*

(i) $\{m_1, ..., m_s\}$ *تولد $M$ بحرية.*

(ii) $\{m_1, ..., m_s\}$ *مستقلة خطيا وتولد $M$.*

(iii) *كل عنصر $m \in M$ يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة بالصيغة* $m = \sum_{i=1}^{s} r_i m_i$، *حيث* $r_i \in R$.

(iv) *كل $m_i$ عديم الفتل و* $M = Rm_1 \oplus ... \oplus Rm_s$.

**البرهـــان**

**(i)** $\Leftarrow$ **(ii)**. حسب التعريف $\{m_1, ..., m_s\}$ تولد $M$. نفرض أن $\sum_{i=1}^{s} r_i m_i = 0$ حيث $r_i \in R$. ليكن $N$ المجموع المباشر الخارجي ${}_RR \oplus ... \oplus {}_RR$ لـ $s$ نسخة من ${}_RR$، وليكن $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ حيث المركبة رقم $i$ تساوي 1. وفقا للتعريف، إن التطبيق $m_i \to e_i$ يمتد إلى تشاكل $\phi$ من $M$ إلى $N$. الآن:

$$0 = \phi(0) = \phi(\Sigma r_i m_i) = \Sigma r_i \phi(m_i) = \Sigma r_i e_i$$
$$= (r_1, \ldots, r_s)$$

إذن $r_1 = \ldots = r_s = 0$ وهذا يثبت أن $\{m_1, \ldots, m_s\}$ مستقلة خطيا.

**(ii) ⇐ (iii)**. بما أن $\{m_1, \ldots, m_s\}$ تولد $M$ فإن كل عنصر من $M$ يمكن التعبير عنه كتركيب خطي على $R$ للعناصر $m_i$. إذا كان $\Sigma r_i m_i = \Sigma r_i' m_i$ حيث $r_i, r_i' \in R$، فإن $\Sigma(r_i - r_i')m_i = 0$ وبالتالي $r_i - r_i' = 0$ حسب تعريف الاستقلال الخطي. إذن كل عنصر من $M$ يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة كتركيب خطي للعناصر $m_i$.

**(iii) ⇐ (iv)**. إذا كان $r \in R$، وكان $r m_i = 0$، فبما أن $0m_i = 0$ أيضا، فإن $r = 0$ وذلك باستخدام وحدانية التعبير عن كل عنصر حسب (iii). إذن كل من $m_i$ عديم الفتل. من الواضح أن $M = \Sigma Rm_i$. لكي نثبت أن المجموع مباشر نفرض أن $m \in Rm_i \cap \sum_{j \neq i} Rm_j$. فيكون $m = r_i m_i = \sum_{j \neq i} r_j m_j$ حيث $r_k \in R$ وبالتالي فإن $r_i = 0$ حسب وحدانية التعبير عن كل عنصر. لذلك $m = 0$ كما هو مطلوب.

**(iv) ⇐ (i)**. من المناسب أن نثبت ذلك عن طريق (iii). يلاحظ أن (iv) يؤدي إلى أن كل عنصر من $M$ يمكن التعبير عنه بالصيغة $\Sigma r_i m_i$ حيث $r_i \in R$. إذا كان $\Sigma r_i m_i = \Sigma r_i' m_i$، فإنه باستخدام (٥-١٥) نحصل على $r_i m_i = r_i' m_i$ لكل $i$. وإذن $(r_i - r_i')m_i = 0$ وبما أن $m_i$ عديم الفتل إذن $r_i - r_i' = 0$ وهذا يعطي (iii).

الآن، لتكن $N$ أية حلقية على $R$ وليكن $m_i \to n_i$ أي تطبيق من $\{m_1, \ldots, m_s\}$ إلى $N$. إذا كان $m \in M$، فإن $m = \Sigma r_i m_i$، حيث $r_i$ عناصر معينة وحيدة من $R$. لنعرف $\phi(m) = \Sigma r_i n_i$. يلاحظ أن ذلك له معنى، فقط لأن $r_i$ عناصر محددة بصورة وحيدة بواسطة $m$. يمكن التأكد بسهولة أن $\phi$ هو التشاكل المطلوب.

**(٦-٩) نتيجة**

*تولد $M$ بحرية بواسطة $s$ من عناصرها إذا وفقط إذا كان $M \cong {}_RR \oplus \ldots \oplus {}_RR$ لـ $s$ نسخة من ${}_RR$.*

**البرهـــان**

سيكون من المناسب أن نكتب $({}_RR)^s$ للتعبير عن المجموع المباشر الخارجي لـ ${}_RR$ مع نفسها $s$ من المرات . نفرض أن $e_i$ ترمز لعديد من النوع $s$ والذي تساوي مركبته غير الصفرية الوحيدة 1 وفي الموقع $i$. يلاحظ أن $(r_1, ..., r_s) = \Sigma r_i e_i$ وبالتالي فإن $\{e_1, ..., e_s\}$ تولد $({}_RR)^s$ ، كما يلاحظ أن هذه المجموعة مستقلة خطيا ، لذلك فهي تولد $({}_RR)^s$ بحرية . من الواضح ، أن كل حلقية متماثلة مع حلقية حرة ، تولد بحرية بنفس العدد من العناصر .

وبالعكس إذا كانت $M$ تولد بحرية بواسطة $\{m_1, ..., m_s\}$ وحيث إن $\{e_1, ..., e_s\}$ تولد $({}_RR)^s$ بحرية فإنه يوجد تشاكلان

$$\phi : M \to ({}_RR)^s \quad , \quad \psi : ({}_RR)^s \to M$$

يرسلان $m_i$ إلى $e_i$ و $e_i$ إلى $m_i$ على الترتيب . وعليه فإن $\phi\psi$ يرسل $e_i$ إلى $e_i$ وبالتالي يرسل كل تركيب خطي للعناصر $e_i$ إلى نفسه . إذن $\phi\psi$ هو التطبيق المحايد لـ $({}_RR)^s$ . وبالمثل فإن $\psi\phi$ هو التطبيق المحايد على $M$ ، إذن كل من $\phi$ و $\psi$ هو تماثل كما هو مطلوب .

**ملاحظات**

١ - أشير في النتائج المذكورة أعلاه إلى مجموعات مولدة منتهية (لأن ذلك كل ما سنحتاج إليه)، ولكن يمكن أن نثبت بسهولة أن هذه النتائج ستبقى صحيحة لمجموعات مولدة اختيارية .

٢ - يلاحظ أن الحلقية ${}_RR$ تولد بحرية دائما بالعنصر 1 وذلك حسب النتيجة (٦-٩) .

٣ - من المعروف في الجبر الخطي أنه إذا كان $K$ حقلا ، فإن كل حلقية مولدة نهائيا على $K$ (أي فضاء متجه مولد بواسطة مجموعة منتهية) تولدها مجموعة مستقلة خطيا (تسمى أساسا) وبالتالي فهي حلقية حرة . وعلى ذلك فإن تعريفنا لأساس حلقية اختيارية متفق مع المعنى الاعتيادي للأساس ، المعطى في الحالة الخاصة لحلقية على $K$ .

٤ - **تحذير!** كل مجموعة مولدة لفضاء متجه تحوي أساسا لهذا الفضاء . هذا ليس صحيحا بصفة عامة لحلقية حرة . بل إنه ليس صحيحا حتى للحلقيات الحرة على $\mathbb{Z}$ . اعتبر الحلقية $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ على $\mathbb{Z}$ التي سبق أن رأينا أنها حرة ؛ وهي مولدة

(لكن ليس بحرية) بواسطة المجموعة $X = \{2 , 3\}$، لأن الحلقية الجزئية المولدة بواسطة $X$ تحوي $1 = 2-3$ الذي يولد بالتأكيد $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$. ومع ذلك $X$ ليست أساسا لـ $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ (لأن المعادلة $3.2 - 2.3 = 0$ توضح أنها غير مستقلة خطيا على $\mathbb{Z}$) ولا تشكل مجموعة جزئية فعلية من $X$ أساسا لأن $\{2\}$ ، $\{3\}$ ، و $\phi$ المجموعة الخالية تولد حلقيات جزئية فعلية.

هناك عبارة أخرى صحيحة للفضاءات المتجهة، ولكنها ليست صحيحة بالنسبة للحلقيات الحرة بصفة عامة وهي كما يلي: إذا كانت $\{m_1, ..., m_s\}$ مجموعة غير مستقلة خطيا، فإن عنصرا ما $m_i$ يكون تركيبا خطيا للعناصر الأخرى. تقدم المجموعة الجزئية $X$ من $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ التي سبق أن أشير إليها أعلاه مثالا مناقضا حيث إن أيا من العنصرين 2 و 3 ليس مضاعفا للآخر على $\mathbb{Z}$.

٥ - بالرغم من أن $\mathbb{Z}_n$ حلقية حرة على $\mathbb{Z}_n$، فإنها ليست حلقية حرة على $\mathbb{Z}$ إذا كان $n \neq 0$ لأن كل عنصر $x$ من $\mathbb{Z}_n$ يحقق $nx = 0$ وبالتالي فإن كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{Z}_n$ هي مجموعة غير مستقلة خطيا على $\mathbb{Z}$. عندما نفكر في $\mathbb{Z}_n$ كحلقية على $\mathbb{Z}_n$، المعامل $n$ يصبح صفرا والمعادلة $[n]\ x = 0$ لاتعني بأي حال من الأحوال أن $x$ مرتبط (غير مستقل) خطيا.

٦ - قد نحاول (كما في الفضاء المتجه) تعريف البعد لحلقية حرة بأنه عدد عناصر أساس لهذه الحلقية. ولكن لحلقات سيئة بدرجة كافية توجد حلقيات حرة عليها ولها أساسات ذات عدد مختلف من العناصر. سنرى في الفصل القادم أن ذلك لا يحدث إذا كانت $R$ حلقة تامة رئيسة، في الواقع إذا كانت $R$ أية حلقة إبدالية بمحايد لا يساوي الصفر، فإن أي أساسين لحلقية حرة على $R$ لهما نفس عدد العناصر (انظر تمرين (١٦) في نهاية هذا الفصل)، ستوضح النتيجة التالية الكثير من أهمية الحلقيات الحرة، مرة أخرى سنثبت النتيجة التالية فقط للحلقيات المولدة نهائيا بالرغم من كونها صحيحة بصفة عامة.

**(٦-١٠) مبرهنة**

*كل حلقية مولدة نهائيا على $R$ هي صورة حلقية حرة على $R$ تحت تأثير تشاكل.*

**البرهـــــان**

لتكن $M = \sum_{i=1}^{s} Rm_i$ حلقية على $R$ مولدة بواسطة مجموعة منتهية عدد عناصرها $s$. نختار حلقية حرة $F$ على $R$ وليكن $\{x_1, \ldots, x_s\}$ أساسا لـ $F$. هذه موجودة حسب (٦-٩)، في الواقع نستطيع أن نعتبر $F$ هي $({}_RR)^s$. حسب تعريف الحرية فإنه يمكن مد التطبيق $x_i \to m_i$ إلى تشاكل $\phi$ على $R$ من $F$ إلى $M$ ؛ تشكل $\mathrm{im}\phi$ حلقية جزئية من $M$ تحوي مجموعة مولدة لـ $M$، وبالتالي فهي $M$ ذاتها، وذلك ينهي البرهان.

سنذكر الآن حالة خاصة من هذه المبرهنة فيما يلي :

**(٦-١١) مبرهنة**

*لتكن $R$ حلقة إبدالية بمحايد، ولتكن $M = Rm$ حلقية دوروية على $R$. إن $M$ تماثل على $R$ حلقية القسمة $_R(R/\mathbf{o}(m))$ ؛ أي يوجد تماثل بين حلقيتين دورويتين على $R$ إذا وفقط إذا كان لهما نفس مثالي الترتيب.*

**ملاحظات**

١ - لتكن لدينا بنية $A$ يمكن أن ينظر إليها بعدة طرق، عندما نود أن نؤكد على كونها حلقية على $R$ نعمل ذلك بالكتابة $_RA$ وهي الحالة التي ذكرت أعلاه عندما أشير إلى حلقية القسمة $R/\mathbf{o}(m)$ للحلقية $_RR$. ومن بين أشياء أخرى يلاحظ أن $R/\mathbf{o}(m)$ زمرة إبدالية، حلقة، حلقية على $R$ وحلقية على نفسها.

٢ - لم يعرف حتى الآن مثالي الترتيب لحلقية دوروية. لتكن $M = Rm$ حلقية دوروية على حلقة إبدالية $R$ بمحايد. إذا كان $r \in R$، وكان $rm = 0$، فإن :

$$r(sm) = s(r\,m) = s0 = 0$$

لكل $s \in R$ وبالتالي $rM = \{0\}$. لذلك $\mathbf{o}(m) = \{r \in R : rM = \{0\}\}$ وبصفة خاصة أي مولدين لـ $M$ يكون لهما نفس مثالي الترتيب.

**(٦-١٢) تعريف**

*إذا كانت $M$ حلقية دوروية على حلقة إبدالية $R$ بمحايد، فإن مثالي الترتيب لأي مولد لـ $M$ يسمى مثالي الترتيب لـ $M$.*

**إثبات المبرهنة (٦-١١)**

يمثل التطبيق $r \to r\,m$ تشاكلا غامرا من الحلقية $_RR$ إلى $M = Rm$، كما في إثبات (٦-١٠)؛ ونحصل عليه بتمديد التطبيق $m \to 1$. من الواضح أن نواته هي $\mathbf{o}(m)$. وباستخدام (٥-١٠) يكون $M \cong {}_R(R/\mathbf{o}(m))$.

وإذن، إذا كان لحلقيتين دورويتين نفس مثالي الترتيب فإنهما تماثلان نفس حلقية القسمة لـ $_RR$ وبالتالي تماثلان بعضهما. العكس واضح.

**ملاحظة**

لقد تمت دراسة معظم هذا الفصل بإفتراض أن $R$ حلقة بمحايد وأضيف في بعض الأحيان شرط كون الحلقة إبدالية. قد يكون مفيدا أن يتأكد القارئ أين عمل ذلك.

## تمارين على الفصل السادس

**(تمثل $R$ حلقة إبدالية بمحايد، إلا إذا ذكر غير ذلك)**

١ - لتكن $N$ حلقية جزئية من حلقية $M$ على $R$. أثبت أنه إذا كانت كل من $N$ و $M/N$ مولدة نهائيا فكذلك تكون $M$.

٢ - أعط مثالا لحلقية $M$ على $R$ بحيث إن $M = M_1 \oplus M_2$، وتكون $M$ مولدة بواسطة مجموعة $X$ ويكون $X \cap M_1 = X \cap M_2 = \phi$.

٣ - أوجد حلقية على $R$ بحيث لا تشكل مجموعة عناصر الفتل فيها حلقية جزئية (**إرشاد:** اعتبر $\mathbb{Z}_n$ لعدد صحيح مناسب $n$).

٤ - أثبت أن الحلقيات الجزئية وحلقيات القسمة لحلقيات فتل، تكون حلقيات فتل. أثبت أن الحلقيات الجزئية من حلقيات عديمة الفتل، تكون عديمة الفتل ولكن ذلك قد لا ينطبق على حلقيات القسمة.

٥ - نفرض أن $M = M_1 + M_2$ حلقية على $R$ وهي مجموع حلقيتين جزئيتين عديمتي الفتل . هل من الضروري أن تكون $M$ عديمة الفتل؟ ما الإجابة في حالة $M = M_1 \oplus M_2$؟

٦ - أثبت أن $\mathbb{Q}$ حلقية عديمة الفتل على $\mathbb{Z}$ وليست حلقية حرة .

٧ - اعتبر كلا من التقارير التالية ، وقرر فيما إذا كان صائبا أم خاطئا ، وأعط إثباتا أو مثالا مناقضا كما هو مناسب .

(i) أية حلقية جزئية من حلقية حرة تكون حلقية حرة .

(ii) أية حلقية جزئية من حلقية حرة تكون عديمة الفتل .

(iii) أية حلقية قسمة لحلقية دوروية تكون دوروية .

(iv) أية حلقية جزئية من حلقية دوروية تكون دوروية .

٨ - لتكن $M$ و $N$ حلقيتين على $R$ مولدتين بحرية بواسطة $n$ من العناصر . أثبت أن $M \cong N$.

٩ - ليكن $V$ فضاء متجها ذا بعد 3 على $\mathbb{Z}_2$ معتبرا كحلقية على $\mathbb{Z}_2[x]$ بواسطة $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_2} V$ ، حيث $\alpha$ معرف على عناصر أساس كمايلي :

$$\alpha(v_1) = v_1 + v_3$$

$$\alpha(v_2) = v_1 + v_2$$

$$\alpha(v_3) = v_2 + v_3$$

أوجد $\mathbf{o}(v)$ لكل $v \in V$ واستنتج أن $V$ حلقية فتل . أوجد عنصرا غير صفري $f$ في $\mathbb{Z}_2[x]$ بحيث إن $fV = \{0\}$.

١٠ - لتكن $R$ حلقة إبدالية بمحايد ، وليكن $J$ , $K$ مثاليين في الحلقة $R$. أثبت أن $_R(R/J) \cong {}_R(R/K)$ إذا وفقط إذا كان $J = K$.

١١ - لتكن $M$ حلقية على $R$ مولدة بحرية بواسطة مجموعة $X$، ولتكن $Y$ مجموعة جزئية من $X$. أثبت أن $Y$ تولد بحرية $RY$. أثبت أن المجموع المباشر لحلقيتين حرتين يكون حرا .

١٢ - أعط مثالا لحلقية $M = T \oplus F_1 = T \oplus F_2$ على $\mathbb{Z}$، حيث $T$ حلقية الفتل الجزئية و $F_1, F_2$ حلقيتان جزئيتان غير صفريتين ومختلفتان . أثبت أنه في هذه الحالة $F_1, F_2$ حلقيتان عديمتا الفتل متماثلتان .

١٣* - أثبت أن الحلقية $_RR$ تكون عديمة الفتل إذا وفقط إذا كان إما $R = \{0\}$ أو $R$ حلقة تامة . أثبت أن كل حلقية جزئية من $_RR$ تكون حرة إذا وفقط إذا كان إما $R = \{0\}$ أو $R$ حلقة تامة رئيسة .

١٤* - أثبت أنه على حلقات ليست إبدالية ، مولدات مختلفة لحلقية دوروية يمكن أن يكون لها مثاليات ترتيب يسرى مختلفة . سنوجز طريقة ممكنة للحل : نفرض أن $V = K^2$ ، حيث $K$ حقل ، ونعتبر $V$ حلقية على الحلقة $M_2(K)$ بمطابقة $V$ مع مجموعة متجهات الأعمدة

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

حيث $x , y \in K$ ونعرف تأثير $M_2(K)$ بضرب المصفوفات . أثبت أن $V$ حلقية دوروية وأن كلا من

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يولد $V$ كحلقية على $M_2(K)$ . احسب الآن مثالي الترتيب الأيسر لكل من هذين المولدين .

١٥ - نفرض أن $R \neq \{0\}$ وأن $M$ حلقية على $R$ مولدة بحرية بواسطة مجموعة $X$ . أثبت أنه لاتوجد مجموعة جزئية فعلية من $X$ تولد $M$ .

١٦** - لتكن $R$ حلقة إبدالية بمحايد، ولتكن $M$ حلقية حرة على $R$ .

(i) أثبت أن أي أساسين منتهيين لـ $M$ يكون لهما نفس عدد العناصر ، وذلك كما يلي : باستخدام تمرين (١٣) في الفصل الثاني ، افرض أن $J$ مثالي أعظمي في الحلقة $R$ . أثبت أن الحلقية $M/JM$ على $R$ يمكن النظر إليها كحلقية على الحقل $R/J$ (انظر تمرين (١٠) في الفصل الخامس) وأنه

إذا كان $\{x_1, \ldots, x_s\}$ أساسا منتهيا لـ $M$ على $R$، فإن $\{x_1 + JM, \ldots, x_s + JM\}$ أساس لـ $M/JM$ على $R/J$.

(ii) أثبت أنه إذا كان لـ $M$ أساس منته، فإن أي أساسين لـ $M$ يكون لهما نفس العدد من العناصر. باستخدام (i) هذا يتضمن ببساطة إثبات أنه لا يمكن أن يكون لـ $M$ أساس غير منته، ويمكن أن يعمل ذلك بإثبات أن مجموعة جزئية منتهية من مثل هذا الأساس تولد $M$، أو باستخدام الطريقة في (i).

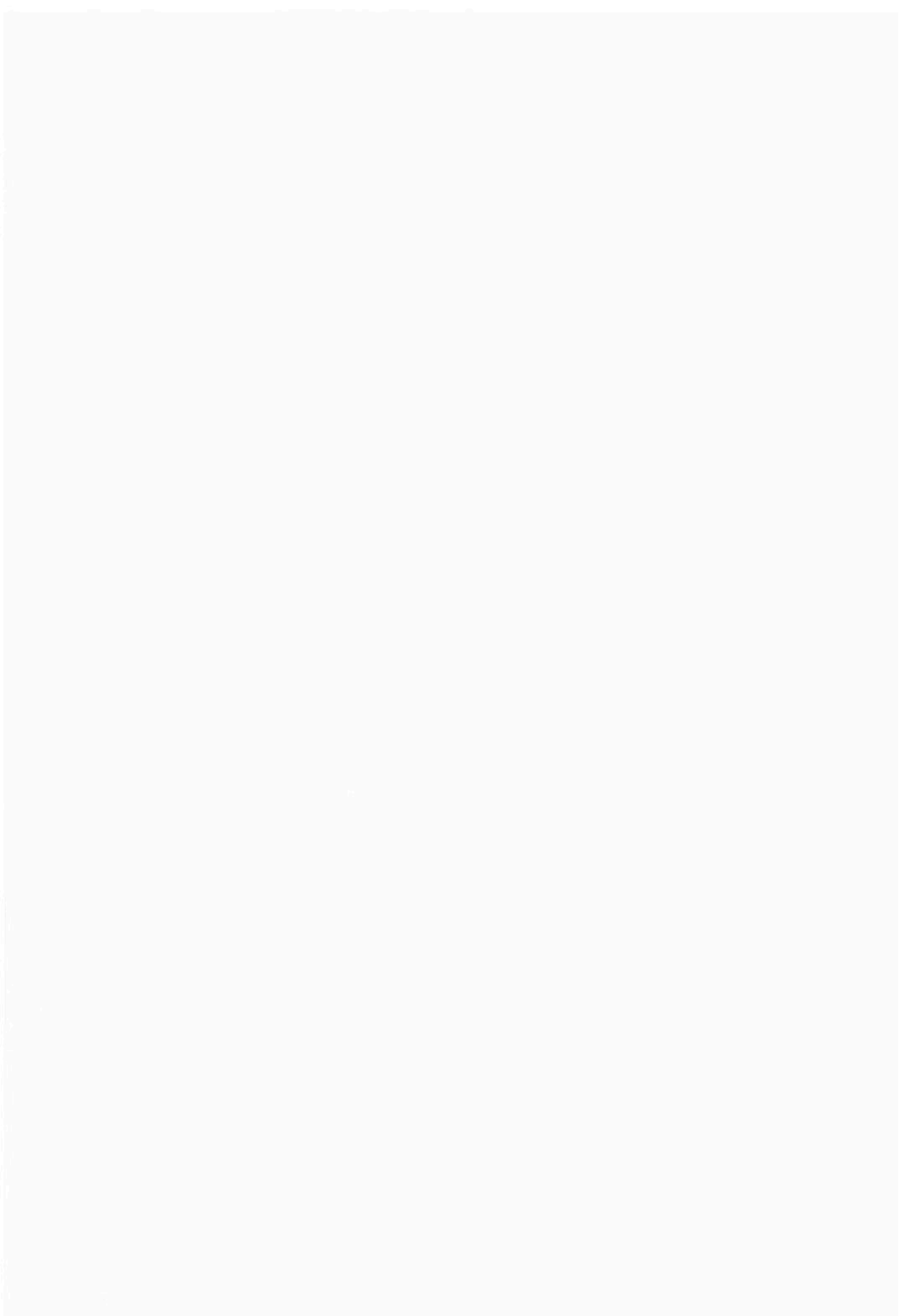
(iii) أثبت أن أي أساسين غير منتهيين لحلقية على $R$ يكون لهما نفس العدد الرئيسي (cardinal number)، حيث $R$ أية حلقة. قليل من حسابات العدد الرئيسي مطلوب هنا.

الجزء الثاني

# التفريق المباشر لحلقية مولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة

*سنفترض أن جميع الحلقات التي تظهر في هذا الجزء حلقات تامة رئيسة إلا إذا نُصَّ على غير ذلك*

- الحلقيات الجزئية من الحلقيات الحرة
- مبرهنات التفريق
- مبرهنات التفريق (مقاربة لا تعتمد على المصفوفات)



# الفصل السابع

# الحلقيات الجزئية من الحلقيات الحرة

## ١ – منهاج الفصل

إن هدفنا في هذا الفصل هو إثبات مبرهنة تفريق . إن مقومات هذه المبرهنة هي :

(أ) حلقة تامة رئيسة $R$،

(ب) حلقية مولدة نهائيا $M$ على $R$.

ونتائج تلك المبرهنة هي :

يمكن التعبير عن $M$ كمجموع مباشر داخلي

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_t$$

بحيث

(i) كل $M_i = Rm_i$ هي حلقية جزئية دوروية ،

(ii) $\mathbf{o}(m_1) \supseteq \mathbf{o}(m_2) \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{o}(mt)$

إن طريقتنا هي أن نعتبر تشاكلا غامرا $\theta : F \to M$ من حلقية حرة(free module) $F$ إلى $M$. نعلم أن $\ker\theta$ (= N مثلا) هي حلقية جزئية من $F$، وبالاستناد إلى مبرهنة التماثل الأولى للحلقيات (٥-١٠)، نعلم أن $M$ متماثلة مع حلقية القسمة $F/N$. إذن نستطيع معرفة بنية $M$ عن طريق دراسة $F/N$. ينتج في النهاية أن الحلقيات الجزئية للحلقيات الحرة المولدة نهائيا تكون حرة (انظر (٧-٨) أدناه) وبالتالي، على وجه الخصوص، ينتج أن $N$ حرة. بعدئذ نستند إلى النتيجة التالية لنثبت أنه من الممكن أن نختار أساسا لـ $F$ مرتبطا بطريقة خاصة جدا بأساس لـ $N$.

**(٧-١) مبرهنة**

*لتكن $R$ حلقة تامة رئيسة، $F$ حلقية حرة على $R$ وذات رتبة (rank) منتهية $s$، ولتكن $N$ حلقية جزئية من $F$. عندئذ يوجد أساس $\{f_1, ..., f_s\}$ لـ $F$ وعناصر $d_1, ..., d_s \in R$ بحيث*

(١) العناصر غير الصفرية في $\{d_1 f_1, ..., d_s f_s\}$ تكون أساسا لـ $N$،

(ب) $d_1|d_2|...|d_s$

**ملاحظات**

١ - في السياق الحالي، هذه المبرهنة هي الشبيه الأفضل الموجود لدينا للحقيقة المعروفة التي مفادها أنه إذاكان $U$ فضاء جزئيا من فضاء متجه ذي بعد منته $V$ على حقل ما، فإنه يمكن تمديد أي أساس $\{f_1, ..., f_t\}$ لـ $U$ إلى أساس $\{f_1, ..., f_t, f_{t+1}, ..., f_s\}$ لـ $V$. في تلك الحالة، إن $d_1 = ... = d_t = 1, d_{t+1} = ... = d_s = 0$. تفيد المبرهنة المذكورة أعلاه أن بعض أساسات $N$ تنتج بطريقة طبيعية من أساسات لـ $F$. ولكن الحقيقة التي مفادها أن أي أساس لـ $N$ لا ينشأ بالضرورة بهذه الطريقة، تشير إلى أن الحالة العامة ليست واضحة وضوح الحالة العامة للفضاءات المتجهة.

٢ - يفيد الشرط (ب)، عندما يترجم إلى لغة المثاليات، بأن

$$d_1R \supseteq d_2R \supseteq . . . \supseteq d_sR$$

إذا كان $d_i = 0$ لعدد $i$، فإن $d_j = 0$ لكل $j = i, i + 1, ..., s$.

في هذا الفصل، سوف تكون المبرهنة (٧-١) محور اهتمامنا. سنثبتها عن طريق تحويلها إلى مسألة عن مصفوفات على $R$. في الفصل الثامن سوف نستخدم (٧-١) لنثبت مبرهنة التفريق المذكورة أعلاه. بعدئذ سوف نبحث في مسألة الوحدانية وعن تحسينات إضافية. بما أن مبرهنة التفريق هي النتيجة المركزية لهذا الكتاب، فإننا نشعر أن لدينا المبرر الكافي كي نقدم معالجة أخرى لتلك المبرهنة. وسنكرس الفصل التاسع لتلك المعالجة. إن البرهان الذي سنعطيه هناك، سيكون مباشرا وقصيرا نسبيا لكنه سوف يتطلب عناية فائقة بالمفاهيم وسوف يكون قليل التثقيف نسبيا.

## ٢ - الحلقيات الحرة - الأساسات، التشاكلات الداخلية والمصفوفات

لا شك أن القارئ حسن الاطلاع على التقابل المشهور بين التشاكلات الداخلية لفضاء متجه ذي بعد منته على حقل $K$ (أي التحويلات الخطية $V \to V$) والمصفوفات من النوع $n \times n$ على $K$. إن وصف هذا التقابل يمتد بسهولة إلى الحالة التي ندرس فيها حلقية حرة نهائية التوليد على حلقة تامة رئيسة. وسوف نشير إلى الطريقة التي يتم بها ذلك، ولكن بالنظر إلى ألفة الحجج، فإننا سوف نفعل ذلك بايجاز معتدل.

لقد استخدمنا كلمة «رتبة» في نص المبرهنة (٧-١) لنصف عدد عناصر أساس لحلقية حرة. ولكن قبل إعطاء التعريف الشكلي، نحتاج إلى أن نعرف أنها لامتغير حقيقي، بكلمات أخرى أن أي أساسين لحلقية حرة يكون لهما نفس عدد العناصر.

**(٧-٢) مبرهنة**

*لتكن $F$ حلقية على حلقة تامة رئيسة، وافرض أن $F$ مولدة بحرية بواسطة مجموعة منتهية عدد عناصرها $n$. عندئذ كل أساس لـ $F$ يحتوي بالضبط على $n$ من العناصر.*

**البرهـــــان**

أولا، نستخدم الاستقراء على $n$ لنثبت أن عدد عناصر أية مجموعة جزئية من $F$، مستقلة خطيا ومنتهية، أقل من أو يساوي $n$.

إذا كان $n = 0$ فإن $F = \{0\}$، وبالتالي فالمجموعة الخالية هي المجموعة الجزئية الوحيدة من $F$ المستقلة خطيا. إذا كان $n = 1$ فإن $F = Rx$. ليكن $r x \in F$ و $sx \in F$. عندئذ نستنتج من العلاقة $s(r x) - r(sx) = 0$ أن $\{rx, sx\}$ غير مستقلة خطيا إلا إذا كان $r = s = 0$؛ في الحالة الأخيرة نجد أن $\{rx, sx\} = \{0\}$ وهي غير مستقلة خطيا. إذن فإن أية مجموعة جزئية مستقلة خطيا من $F$ لا تحتوي على عنصرين. بما أن كل مجموعة جزئية من مجموعة مستقلة خطيا تكون مستقلة خطيا، فإن عدد عناصر أية مجموعة جزئية مستقلة خطيا من $F$، لا يزيد على عنصرين أيضا.

الآن، افــــرض أن $n>1$ وأن $F = Rf_1 \oplus ... \oplus Rf_n$. لــيــكــن $\overline{F} = Rf_2 \oplus \cdots \oplus Rf_n$ ولتكـن $X = \{x_1, ..., x_m\}$ مجموعة جزئية من $F$ بحيث $m > n$. إذا كانت $X \subseteq \overline{F}$ فبالاستناد إلى فرض الاستقراء، نجد أن $X$ غير مستقلة خطيا. أما إذا كانت $X \not\subseteq \overline{F}$ فإنه، من غير أن نفقد العمومية، يمكننا أن نفرض أن $x_1 \notin \overline{F}$. الآن، إن

$$F/\overline{F} \cong Rf_1 \qquad (1)$$

وهي مولدة بحرية بعنصر واحد، وبالتالي فإن المجموعة $\{x_1 + \overline{F},\ x_i + \overline{F}\}$ غير مستقلة خطيا لكل $i \geq 2$. إذن يوجد عنصران $r_i, s_i \in R$، ليس كلاهما العنصر الصفري، بحيث $r_i(x_1 + \overline{F}) + s_i(x_i + \overline{F}) = \overline{F}$ ؛ أي $r_i x_1 + s_i x_i \in \overline{F}$. الآن، إذا كان $s_i = 0$ فإن $r_i(x_1 + \overline{F}) = \overline{F}$. ولكن $x_1 + \overline{F}$ عنصر غير تافه في الحلقية $F/\overline{F}$ المتماثلة مع $_RR$ وذلك بسبب (1) ؛ بالاستناد إلى المثال (٣) الذي يسبق (٦-٥) مباشرة إن $_RR$ عديمة الفتل وبالتالي فإن $r_i = 0$، وهذا تناقض. إذن $s_i \neq 0$ لكل $i = 2, ..., m$. ضع $y_i = r_i x_1 + s_i x_i$ ؛ عندئذ نكون قد وجدنا $m - 1$ عنصرا $y_2, ..., y_m$ في $\overline{F} = Rf_2 \oplus \cdots \oplus Rf_n$ المولدة بحرية بواسطة $n - 1$ عنصرا $\{f_2, ..., f_n\}$. بما أن $m - 1 > n - 1$ فإننا بالاستناد إلى فرض الاستقراء نجد أن هذه العناصر غير مستقلة خطيا. إذن توجد عناصر $t_2, ..., t_m \in R$، ليست جميعها العنصر الصفري، بحيث $\sum_{i=2}^{m} t_i y_i = 0$. إذا عبرنا عن الجانب الأيسر كتركيب خطي من $x_1, ..., x_n$، فإن معامل $x_i$ هو $t_i s_i$ لكل $i \geq 2$. بما أنه يوجد $t_i$ بحيث $t_i \neq 0$ وبما أن كل $s_i$ يحقق $s_i \neq 0$ فإنه ينتج أن أحد هذه المعاملات غير صفري. إذن $\{x_1, ..., x_m\}$ غير مستقلة خطيا. إن هذا يثبت الدعوى التي بدأنا بها البرهان.

مما تقدم ينتج أنه إذا كان $\{u_1, ..., u_k\}$ أساسا منتهيا آخر لـ $F$ فإن $n \geq k$. استنادا إلى التماثل فإن $k \geq n$، وبالتالي فإن $k = n$. الآن، ولكي نتم البرهان، نفرض أنه يوجد أساس غير منته $Z$ لـ $F$. لتكن $z_1, ..., z_t$ عناصر من $Z$ حيث $t$ عدد منته وليكن $F^* = \sum_{i=1}^{t} Rz_i$. إذا كان $z_i \to m_i$ تطبيقا من $\{z_1, ..., z_t\}$ إلى $M$ حيث $M$ حلقية على

$R$ فإننا نستطيع أن نمدد هذا التطبيق إلى تشاكل من $F^*$ إلى $M$ كما يلي: أولا، نمدد التطبيق إلى $Z$ وذلك بأن نقرن جميع العناصر المتبقية في $Z$ بالعنصر الصفري، ثم نمدد إلى تشاكل من $F$ بأكمله إلى $M$ وذلك بالاستناد إلى أن $Z$ تولد $F$ بحرية (تذكر التعريف (٦-٦)). إذن المجموعة $\{z_1, ..., z_t\}$ تولد $F^*$ بحرية، وبالاستناد إلى (٦-٨) تكون مستقلة خطيا. إذن، بالاستناد إلى النص المذكور في بداية البرهان يكون $t \le n$. ولكن بما أن $Z$ أساس غير منته فإننا نستطيع أن نختار $t$ بحيث $t>n$، وبالتالي فإننا نحصل على تناقض. وهذا يتم البرهان.

آخذين هذه النتيجة بعين الاعتبار، نستطيع الآن إعطاء التعريف التالي.

**(٧-٣) تعريف**

*لتكن $F$ حلقية حرة (على حلقة تامة رئيسة) ذات أساس منته. عندئذ نعرف رتبة (rank)$F$ على أنها عدد عناصر أي أساس لـ $F$.*

**ملاحظات**

١ - في حالة الفضاءات المتجهة، من الواضح أن الرتبة هي البعد بالمعنى المعتاد.

٢ - فيما يلي، عندما نتكلم عن أساس لـ $F$ فإننا، غالبا ما نقصد أساسا مرتبا (ordered basis)؛ أي، مجموعة من العناصر التي تكون أساسا وتكون قد أعطيت ترتيبا معينا. وبالتالي فإن أي أساسين مؤلفين من نفس العناصر ومرتبين بطريقتين مختلفتين يعتبران مختلفين. وعوضا عن استخدام ترميز معين من أجل التمييز بين الأساسات المرتبة والأساسات غير المرتبة فإننا سنترك للقارئ أن يستنبط الأساس المقصود من سياق الحديث، ونلاحظ هنا أنه عندما نتعامل مع مصفوفات التشاكلات الداخلية، كما هي الحال أدناه، فإن ترتيب الأساس يكون مهما دائما.

الآن، لتكن $F$ حلقية حرة على $R$ ذات رتبة منتهية $s>0$ (حيث $R$، كما ذكرنا سابقا، من الآن فصاعدا ترمز إلى حلقة تامة رئيسة)، وليكن $f = \{f_1, ..., f_s\}$ أساسا لـ $F$. عندئذ، إذا كان $\alpha \in \mathrm{End}_R F$ فإنه بالاستناد إلى (٦-٨) يكون

$$\alpha\left(f_i\right)=\sum_{j=1}^{s} a_{ji} f_j \quad ; \quad (i=1,2,\ldots,s) \qquad (2)$$

حيث العناصر $a_{ji} \in R$ معينة بشكل وحيد. إذن $\alpha$ تعين، بشكل وحيد، مصفوفة $A=\left(a_{k\ell}\right)$ من النوع $s \times s$ حيث مدخلات $A$ تنتمي إلى $R$، والعمود رقم $i$ من $A$ يتكون من معاملات $\alpha(f_i)$ بالنسبة إلى الأساس $f$. بالعكس، إذا كانت $A=(a_{kl})$ مصفوفة اختيارية من النوع $s \times s$ حيث مدخلات $A$ تنتمي إلى $R$ فإن تعريف الحرية يشير إلى أنه يوجد تشاكل داخلي وحيد لـ $F$ بحيث يكون تأثيره على $f_1, \ldots, f_s$ معطى بـ(2). إذن فالتقابل، المعطى بواسطة (2)، بين التشاكلات الداخلية والمصفوفات يكون واحدا لواحد.

نستطيع أن نجعل $\mathrm{End}_R F$ حلقة بالطريقة المعتادة؛ أي عن طريق تعريف مجموع وجداء كل زوج $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_R F$ كما يلي:

$$(\alpha+\beta)(x)=\alpha(x)+\beta(x),\ (\alpha\beta)(x)=\alpha(\beta(x))$$

لكل $x \in F$. نستطيع أن نتحقق بسهولة من أن كلا من $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ تشاكل داخلي لـ $F$ ومن أن العمليتين تجعلان $\mathrm{End}_R F$ حلقة. إذا كان $\beta$ يقابل المصفوفة $(b_{kl})$ فإن $\beta\left(f_i\right)=\sum_j b_{ji} f_j$. إذن

$$(\alpha+\beta)\left(f_i\right)=\alpha\left(f_i\right)+\beta\left(f_i\right)=\sum_j a_{ji} f_j+\sum_j b_{ji} f_j=\sum_j\left(a_{ji}+b_{ji}\right) f_j$$

$$(\alpha\beta)\left(f_i\right)=\alpha\left(\beta\left(f_i\right)\right)=\alpha\left(\sum_j b_{ji} f_j\right)=\sum_j b_{ji}\, \alpha\left(f_j\right)$$

$$=\sum_j b_{ji}\left(\sum_k a_{kj} f_k\right)=\sum_k\left(\sum_j a_{kj} b_{ji}\right) f_k$$

إذن، إن المصفوفة المقابلة لـ $\alpha+\beta$ هي $(a_{kl}+b_{kl})$ كما أن مُدْخَل (entry) الموقع $(k, l)$ في المصفوفة المقابلة لـ $\alpha\beta$ هو $\sum_j a_{kj} b_{jl}$. وهكذا، فإننا إذا عرفنا مجموع وجداء

المصفوفات كما هو معتاد، فإن التطبيق الذي يقرن كل تشاكل داخلي بمصفوفته يكون تماثل حلقات من $\text{End}_R F$ إلى $M_s(R)$. في الحقيقة، يكون هذا هو السبب الكامن وراء تعريفنا لجمع وجداء المصفوفات كما هو معتاد. لاحظ أن هذا التماثل قد أنشىء بالنسبة إلى أساس خاص لـ $F$ ؛ على وجه العموم إن الأساسات المختلفة تقابل تماثلات مختلفة.

الآن، إذا كان $\alpha$ تشاكلا داخليا لـ $F$ فإن $\alpha$ يكون تماثلا ذاتيا إذا وفقط إذا كان يوجد تشاكل داخلي $\beta$ بحيث

$$\alpha\beta = \beta\alpha = 1_F \tag{3}$$

حيث $1_F$ هو التطبيق المحايد على $F$. واضح أن مصفوفة $1_F$ هي المصفوفة المحايدة المعتادة من النوع $s \times s$. بالاستناد إلى التماثل بين $\text{End}_R F$ و $M_s(R)$، نجد أن (3) تكافىء

$$AB = BA = 1_s \tag{4}$$

حيث $A$ و $B$ هما، على الترتيب، مصفوفتا $\alpha$ و $\beta$ بالنسبة إلى $f$ وحيث $1_s$ هي المصفوفة المحايدة من النوع $s \times s$.

**(٧-٤) تعريف**

*إذا كانت $A$ مصفوفة من النوع $s \times s$ على $R$، فإننا نقول إن $A$ قابلة للانعكاس (invertible) إذاكانت توجد مصفوفة $B$ من النوع $s \times s$ على $R$ بحيث تتحقق العلاقة (4). (غالبا ما تسمى المصفوفة القابلة للانعكاس مصفوفة غير شاذة (non-singular)، وهذه التسمية متداولة، بشكل خاص، عندما تكون $R$ حقلا). إن التكافؤ بين (3) و (4) يفيدنا أن التماثلات الداخلية لـ $F$ تقابل بالضبط المصفوفات القابلة للانعكاس وذلك في التماثل بين $\text{End}_R F$ و $M_s(R)$. من الواضح أن المصفوفات القابلة للانعكاس هي عناصر الوحدة في $M_s(R)$.*

عندما نتعامل مع الحلقيات الحرة فإننا، كما هي الحال بالنسبة للفضاءات المتجهة، غالبا ما نريد أن نمر من أساس ما إلى أساس آخر، وإن الاعتبارات المذكورة أعلاه تفيدنا عن كيفية القيام بذلك. نعلم من (٧-٢) أن عدد عناصر أي أساس لـ $F$

هو $s$. لتكن $f^* = \{f_1^*, \cdots, f_s^*\}$ مجموعة عناصر عددها $s$، ولنعتبر السؤال التالي : ما هي الشروط التي يجب أن تتحقق حتى تكون $f^*$ أساسا لـ $F$ ؟ إن

$$f_i^* = \sum_{j=1}^{s} a_{ji} f_j \ ; \ (i = 1, 2, \ldots, s)$$

حيث $A = (a_{kl})$ مصفوفة ما، من النوع $s \times s$ على $R$. من تعريف الحرية، نعلم أنه يوجد تشاكل داخلي وحيد $\alpha$ على $R$ لـ $F$ معرف بواسطة $\alpha(f_i) = f_i^*$ حيث $i = 1, 2, \ldots, s$. من المعادلة المذكورة أعلاه، نجد أن مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى $f$ هي $A$. الآن، نأخذ بعين الاعتبار هذا الترميز ونقدم المأخوذة التالية.

**(٧-٥) مأخوذة**

*التقارير التالية متكافئة :*

(i) $f^*$ *أساس لـ* $F$.

(ii) $\alpha$ *تماثل ذاتي لـ* $F$.

(iii) $A$ *مصفوفة قابلة للانعكاس.*

**البرهـــــان**

بما أننا قد أثبتنا سابقا تكافؤ التقريرين الأخيرين فإنه يكفي اثبات تكافؤ (i) و (ii).

من الواضح أنه إذا كان $\alpha$ تماثلا ذاتيا لـ $F$ فإن $f^*$ يكون أساسا لـ $F$. في الحقيقة، إذاكانت $m_1, \ldots, m_s \in M$ حيث $M$ حلقية ما على $R$، فإننا بالاستناد إلى تعريف الحرية نجد أنه يوجد تشاكل $\theta : F \to M$ على $R$ بحيث $\theta(f_i) = m_i$ لكل $1 \le i \le s$. عندئذ، يكون $\theta\alpha^{-1} : F \to M$ تشاكلا على $R$ ويقرن هذا التشاكل $f_i^*$ بـ $m_i$ لكل $i$.

بالعكس، إذاكان $f^*$ أساسا فإنه يوجد تشاكل داخلي $\beta$ على $R$ لـ $F$ بحيث $\beta(f_i^*) = f_i \quad (1 \le i \le s)$. واضح أن $\beta\alpha = \alpha\beta = 1_F$، وبالتالي فإن $\alpha$ تماثل ذاتي.

إذن، فتغييرات أساسات الحلقيات الحرة على حلقة تامة رئيسة يتم إحداثها بواسطة المصفوفات القابلة للانعكاس تماما كما هي الحال بالنسبة إلى الفضاءات المتجهة.

ليس ضروريا أن نؤكد بقوة أن المعالجة السابقة لتمثيل التشاكلات الداخلية لـ $F$ بدلالة المصفوفات، قد تمت بالنسبة إلى أساس معين $f$ لـ $F$. ولكن غالبا ما يكون مهما أن نعلم ماذا يحدث عندما ننتقل إلى أساس جديد $f^*$ لـ $F$ – ما العلاقة التي تربط مصفوفة تشاكل داخلي $\alpha$ بالنسبة إلى $f^*$ مع مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى $f$؟ نستطيع الإجابة عن هذا السؤال بسهولة. في الحقيقة، ليكن $\xi$ هو التماثل الذاتي لـ $F$ الذي يرسل $f_i$ إلى $f_i^*$. عندئذ، إذا كانت $\left(a_{kl}^*\right)$ هي مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى $f^*$ فإن

$$\alpha\left(f_i^*\right) = \sum_j a_{ji}^* f_j^*$$

أي

$$\alpha\xi(f_i) = \sum_j a_{ji}^* \xi\left(f_j\right)$$

إذن

$$\xi^{-1}\alpha\xi(f_i) = \sum_j a_{ji}^* f_j$$

وهذا يعني أن $A^* = \left(a_{kl}^*\right)$ هي مصفوفة $\xi^{-1}\alpha\xi$ بالنسبة إلى $f$.

إذن

$$A^* = X^{-1}AX$$

حيث $X$ هي مصفوفة $\xi$ بالنسبة إلى $f$؛ وكما رأينا أعلاه فإن هذه هي المصفوفة التي تعبر عن $f_j^*$ بدلالة $f_i$.

نختم هذا البند بملاحظة عن المحددات. إذا كانت $X$ مصفوفة مربعة على حلقة إبدالية بمحايد فإنه يمكن تعريف محدد (determinant) $X$، $\det X$، تماما كما في حالة المصفوفة المربعة على حقل، كما أن الخواص البسيطة المعتادة للمحددات تتحقق أيضا في هذه الحالة. يستطيع القارئ أن يتأكد من ذلك بسهولة، وذلك عن طريق العودة إلى بسط موضوع المحددات في أي كتاب دراسي عن الجبر الخطي، وفحص البراهين الموجودة هناك. وحاليا نحتاج فقط إلى الحقيقتين التاليتين:

(i) إذاكان $X, Y \in M_s(R)$ فإن $\det XY = \det X.\det Y$ .

(ii) إذاكان $X \in M_s(R)$ فإن $X.\text{adj}X = \text{adj}X.X = \det X.1_s$ حيث $(\text{adj}X)_{ij} = X_{ji}$ هو متعامل (cofactor) $x_{ji}$ في $X$ .

بالاستناد إلى هاتين الحقيقتين، نستطيع أن نستنتج بسهولة التمييز التالي للمصفوفات القابلة للانعكاس على $R$ .

### (٧-٦) مأخوذة

*لتكن $R$ حلقة إبدالية بمحايد، ولتكن $X \in M_s(R)$ . عندئذ، إن $X$ قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا كان $\det X$ عنصر وحدة في $R$ .*

### البرهـــــان

أولا، افرض أن $X$ قابلة للانعكاس. إذن توجد $Y \in M_s(R)$ بحيث $XY = 1_s$ . بأخذ المحدد للطرفين واستخدام (i) نجد أن $\det X.\det Y = det\, 1_s = 1$ . إذن $\det X$ عنصر وحدة في $R$. بالعكس، افرض أن $\det X$ عنصر وحدة في $R$. عندئذ، في (ii)، نقسم على $\det X$ لنستنتج أن $XY = YX = 1_s$ حيث $Y = (\det X)^{-1}$ . $\text{adj}X$ . إذن $X$ قابلة للانعكاس.

إذن، على سبيل المثال، إن عناصر $M_s(\mathbb{Z})$ القابلة للانعكاس هي تلك العناصر التي محددها يساوي $\pm 1$ ؛ كذلك إن عناصر $M_s(K[x])$ القابلة للانعكاس هي تلك العناصر التي محددها ينتمي إلى $K^*$ .

## ٣ - صياغة مصفوفية للمبرهنة (٧-١)

في هذا البند سنعيد صياغة (٧-١) مستخدمين لغة المصفوفات. ولكن قبل أن نفعل ذلك فإننا نحتاج إلى إعطاء البرهان الموعود بأن الحلقيات الجزئية للحلقيات الحرة ذات الرتبة المنتهية (على حلقة تامة رئيسة) تكون حرة. سوف نستخدم المأخوذة التالية، وهي تعبر عن إحدى خواص الحلقيات الحرة؛ وهذه الخاصة مهمة جدا في سياقات أكثر تقدما وسوف نستند إليها عدة مرات فيما يلي. إنها «خاصة الانشطار»؛ وقد سميت

كذلك لأنها تفيد بأنه إذا تحققت شروط معينة، فإن الحلقية تنشطر إلى مجموع مباشر لحلقيتين جزئيتين.

**(٧-٧) مأخوذة**

*لتكن $M$ حلقية على $R$، لتكن $F$ حلقية حرة على $R$ ذات رتبة منتهية، وليكن $\phi : M \to F$ تشاكلا غامرا. عندئذ توجد حلقية جزئية $F^*$ من $M$ بحيث $F^* \cong F$ وبحيث $M = F^* \oplus \ker\phi$.*

**ملاحظة**

بالرغم من أننا قد قصرنا نص هذه النتيجة على الحلقيات الحرة ذات الرتبة المنتهية على حلقة تامة رئيسة، فإنها صحيحة في حالة الحلقيات الحرة الاختيارية بالاستناد إلى نفس الحجة. لقد ذكرنا الفرض المقيد في النص ابتغاءً للسهولة، وما على القارئ الذي يفضل ذلك إلا أن يتجاهل التعميم.

**البرهـــــان**

ليكن $\{f_1, ..., f_s\}$ أساسا لـ $F$. بما أن $\phi$ تشاكل غامر، فإنه توجد عناصر $m_i \in M$ بحيث $\phi(m_i) = f_i$ حيث $1 \le i \le s$. حسب تعريف الحرية فإنه يوجد تشاكل $\psi : F \to M$ على $R$ بحيث $\psi(f_i) = m_i$ لكل $1 \le i \le s$. عندئذ $\phi\psi(f_i) = f_i$ لكل $i$ وبالتالي فإن

$$\phi\psi = 1_F \qquad (5)$$

ليكن $F^* = \psi(F)$. ندعي أن هذه الحلقية هي الحلقية الجزئية المطلوبة. بالاستناد إلى (5) يكون $\phi(F^*) = \phi\psi(F) = F$. إذن، إذا كان $m \in M$ فإن $\phi(m) = \phi(m^*)$ لعنصر ما $m^* \in F^*$. إذن $\phi(m - m^*) = 0$ و $m - m^* \in K = \ker\phi$. إذن $m \in K + F^*$، وبالتالي فإن $M = K + F^*$. الآن، ليكن $n \in K \cap F^*$. عندئذ، يوجد $f \in F$ بحيث $n = \psi(f)$. بما أن $n \in K$ فإننا، وفق (5)، نجد أن $0 = \phi(n) = \phi\psi(f) = f$. إذن $n = 0$ و $K \cap F^* = \{0\}$ وبالتالي فإن $M = K \oplus F^*$. أخيرا، بما أن $\phi(F^*) = F$، وبما أن نواة اقتصار $\phi$ على $F^*$ هي $F^* \cap K = \{0\}$، فإن $\phi$ تماثل من $F^*$ إلى $F$.

**(٧-٨) مبرهنة**

*إذا كانت $R$ حلقة تامة رئيسة وكانت $F$ حلقية حرة على $R$ وذات رتبة منتهية $s$، فإن كل حلقية جزئية من $F$ تكون حرة ورتبتها أقل من أو تساوي $s$.*

**البرهـــان**

نستخدم الاستقراء على $s$. إذاكانت $s = 0$ فإن $F = \{0\}$ وهي مولدة بحرية بالمجموعة الخالية، وإن $F$ هي الحلقية الجزئية الوحيدة من نفسها في هذه الحالة. إذا كانت $s = 1$ فإن $F \cong {}_R R$ وفق (٦-٩)، وإن الحلقيات الجزئية من $F$ تقابل المثاليات $J$ من $R$. بما أن $R$ حلقة تامة رئيسة فإنه يوجد $a \in J$ بحيث $J = Ra$. إذا كان $a = 0$ فإن $J = \{0\}$، وهي حلقية حرة على $R$ رتبتها 0 وإذا كان $a \neq 0$ فإن التطبيق $r \to ra$ يكون تماثل حلقيات على $R$ من ${}_R R$ إلى $Ra = J$. إذن، $J \cong {}_R R$ وهي حرة ورتبتها 1.

الان، افرض أن $s > 1$، وأن المبرهنة صحيحة للحلقيات الحرة التي رتبتها أقل من $s$. ليكن $f = \{f_1, ..., f_s\}$ أساسا لـ $F$. حسب (٦-٨)، يكون $F = Rf_1 \oplus ... \oplus Rf_s$. لتكن $N$ حلقية جزئية من $F$ وضع $\overline{F} = Rf_2 \oplus \cdots \oplus Rf_s$ ؛ واضح أن $\overline{F}$ حلقية جزئية حرة رتبتها $s - 1$. عندئذ، بالاستناد إلى الاستقراء، تكون $\overline{F} \cap N$ حرة ورتبتها أقل من أو تساوي $s - 1$.

الآن، حسب مبرهنة التماثل (٥-١١)، نجد أن

$$F/\overline{F} = Rf_1 \oplus \overline{F}/\overline{F} \cong Rf_1/Rf_1 \cap \overline{F} = Rf_1/\{0\} \cong Rf_1$$

وبالتالي فإن $F/\overline{F}$ حرة ورتبتها 1. ليكن $v$ هو التشاكل الطبيعي من $F$ إلى $F/\overline{F}$، وليكن $\bar{v}$ هو اقتصار $v$ على N. عندئذ، إن $\bar{v}$ تطبيق غامر من $N$ إلى حلقية جزئية من $F/\overline{F}$، وبالاستناد إلى الحالة $s = 1$ نجد أن هذه الحلقية الجزئية سوف تكون حرة ورتبتها 1 أو 0. بما أن $\ker \bar{v} = \overline{F} \cap N$ فإننا بالاستناد إلى المأخوذة (٧-٧) نجد أن

$$N = L \oplus \left(\overline{F} \cap N\right)$$

حيث $L$ حرة ورتبتها 0 أو 1. إذاكانت $L = \{0\}$، فإن $N = \overline{F} \cap N$ حرة ورتبتها أقل من أو تساوي $s - 1$. إذا كانت $L = Rx$ حرة ورتبتها 1، فإن $N = Rx \oplus Rg_1 \oplus ... \oplus Rg_t$

حيث $\{g_1, ..., g_t\}$ أساس لـ $\overline{F} \cap N$ . بما أن $t \leq s - 1$ فإننا نجد أن $N$ حرة ورتبتها أقل من أو تساوي $s$ كما هو مطلوب .

لنعد الآن إلى الموقف المبين في (٧-١)، حيث $N$ حلقية جزئية من $F$ وحيث $F$ حلقية حرة ذات رتبة منتهية $s$، ولنفرض آنيا أن كلا من $F$ و $N$ ليست صفرية . ليكن $f = \{f_1, ..., f_s\}$ أساسا لـ $F$، وليكن $n = \{n_1, ..., n_t\}$ أساسا لـ $N$ - إن مثل هذا الأساس موجود وذلك بالاستناد إلى (٧-٨). بما أن العناصر $n_i$ تنتمي إلى $F$ فإن

$$n_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ji} f_j \quad ; \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ t)$$

حيث $a_{kl}$ هي عناصر في $R$ معينة بشكل وحيد. عندئذ، إن المصفوفة $A = (a_{kl})$ من النوع $s \times t$ وهي معينة بشكل وحيد عن طريق تعيين الأساس المرتب $f$ لـ $F$ والأساس المرتب $n$ لـ $N$. تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة $n$ بالنسبة إلى $f$. الآن، سنرى ماذا يحدث عندما نأخذ أساسا جديدا $f^*$ لـ $F$ وأساسا جديدا $n^*$ لـ $N$. ما هي علاقة مصفوفة $n^*$ بالنسبة إلى $f^*$ بالمصفوفة $A$ ؟ .

بالاستناد إلى البند الثاني من هذا الفصل، نعلم أن الأساسات الجديدة تعطى بواسطة مصفوفات قابلة للانعكاس ؛ أي

$$f_i^* = \sum_{j=1}^{s} x_{ji} f_j$$

و

$$n_i^* = \sum_{j=1}^{t} y_{ji} n_j$$

حيث $X = (x_{kl})$ مصفوفة من النوع $s \times s$ وقابلة للانعكاس على $R$ وحيث $Y = (y_{kl})$ مصفوفة من النوع $t \times t$ وقابلة للانعكاس على $R$. نستطيع أن نعبر عن العناصر $f_i$ بدلالة العناصر $f_j^*$ وذلك بواسطة المصفوفة $X^{-1}$. في الحقيقة، إذا كانت $X^{-1} = (\hat{x}_{kl})$ فإن :

$$\Sigma\hat{x}_{ji} f^*_j = \Sigma\hat{x}_{ji} x_{kj} f_k = \Sigma x_{kj} \hat{x}_{ji} f_k = \Sigma\delta_{ki} f_k = f_i$$

حيث $\delta_{ki}$ هي دلتا كرونر، وحيث تتم عملية الجمع بالنسبة إلى الأدلة التي تظهر مرتين. عندئذ، نجد أن:

$$\begin{aligned} n^*_i = \Sigma y_{ji} n_j = \Sigma y_{ji} a_{kj} f_k &= \Sigma y_{ji} a_{kj} \hat{x}_{lk} f^*_l \\ &= \Sigma \hat{x}_{lk} a_{kj} y_{ji} f^*_l \\ &= \Sigma\left(X^{-1}AY\right)_{li} f^*_l \end{aligned}$$

وبالتالي فإن مصفوفة $n^*$ بالنسبة إلى $f^*$ هي

$$A^* = X^{-1}AY =$$

إذن، بإجراء تغيير مناسب لأساس كل من $F$ و $N$ نستطيع أن نستبدل $A$ بأية مصفوفة متعلقة بها بالشكل المذكور أعلاه، حيث كل من $X$ و $Y$ مصفوفة اختيارية قابلة للانعكاس ومن نوع مناسب على $R$. إن هذه النتيجة تدفعنا إلى إعطاء التعريف التالي.

**(٧-٩) تعريف**

*لتكن $A$ و $B$ مصفوفتين من نفس النوع على $R$. عندئذ، نقول إن $B$ مكافئة (equivalent) لـ $A$ (على $R$) إذا كانت توجد مصفوفتان $X$ و $Y$ على $R$ (من نوع مناسب) بحيث:*

$$B = X A Y$$

في الحقيقة، إن هذه العلاقة من «التكافؤ» هي علاقة تكافؤ، ويستطيع القارئ أن يتحقق من ذلك بسهولة.

الآن، سوف نبين أن النقاش السابق يمكننا من اختزال (٧-١) إلى المبرهنة التالية والتي تخص المصفوفات.

**(٧-١٠) مبرهنة**

*لتكن $R$ حلقة تامة رئيسة، ولتكن $A$ أية مصفوفة من النوع $s \times t$ على $R$. عندئذ، إن $A$ مكافئة على $R$ لمصفوفة $\text{diag}(d_1, \ldots, d_u)$ حيث $d_1|\cdots|d_u$.*

إن المصفوفة $\operatorname{diag}(d_1, ..., d_u)$ المذكورة أعلاه هي مصفوفة من النوع $s \times t$ وعناصرها الموجودة على القطر؛ أي في الأماكن $(1, 1), (2, 2), ..., (u, u)$ هي $d_1, d_2, ..., d_u$ $(u = \min\{s, t\})$، ولكن عناصرها الأخرى أصفار.

إن استنتاج (٧-١) من (٧-١٠) أمر سهل. من أجل ذلك، نفرض أن $N$ و $F$ معرفتان كما في (٧-١). إذا كانت $N = \{0\}$، فإننا نأخذ أي أساس لـ $F$ ونأخذ جميع العناصر $d_i$ أصفارا. إذاكانت $N \neq \{0\}$، فإننا نفرض أن $n$ أساس لـ $N$ وأن $f$ أساس لـ $F$ كما هو مذكور أعلاه، ونفرض أن $A$ مصفوفة $n$ بالنسبة إلى $f$. عندئذ، بالاستناد إلى (٧-١٠) نجد أنه توجد مصفوفتان $X^{-1}$ و $Y$ قابلتان للانعكاس على $R$ بحيث

$$X^{-1}AY = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_u)$$

حيث $d_1|\cdots|d_u$. وكما هو مذكور أعلاه فإن $X$ و $Y$ تعينان أساسين جديدين $f^*$ و $n^*$ لـ $F$ و $N$، وإن مصفوفة $n^*$ بالنسبة إلى $f^*$ هي $\operatorname{diag}(d_1, ..., d_u)$. إذن:

$$n_1^* = d_1 f_1^*, \ \cdots \ , \ n_u^* = d_u f_u^*$$

هو أساس لـ $N$. الآن، إذا وضعنا $d_{u+1} = ... = d_s = 0$ وتذكرنا أن $u \leq s$ (في الحقيقة، في هذه الحالة $u$ هي $t$)، فإننا نحصل بالضبط على النتيجة (٧-١).

بناء على ما تقدم، فإن هدفنا الآن هو إثبات (٧-١٠). وبالتالي فإننا نستطيع أن ننسى الحلقيات $F$ و $N$ آنيا وأن نركز على المصفوفات.

## ٤ – العمليات الصفية الابتدائية والعمليات العمودية الابتدائية

إن ما سنتعرض له في هذه الفقرة مألوف جدا في الحالة الخاصة التي تكون عناصر المصفوفات فيها منتمية إلى حقل. أولا، نعرف قائمة من المصفوفات المربعة الخاصة والتي تنتمي عناصرها إلى $R$ (ليس ضروريا تعيين النوع):

(i) $F_{ij}$ هي المصفوفة التي نحصل عليها من مصفوفة الوحدة عن طريق تبديل الصف $i$ والصف $j$.

(ii) $G_i(u)$ هي المصفوفة القطرية التي تحتوي على $u$ في الصف $i$ حيث $u$ عنصر وحدة في $R$، وتحتوي على 1 في الأماكن القطرية الأخرى.

(iii) لأي $r \in R$ و $i \neq j$ إن $H_{ij}(r)$ هي المصفوفة التي نحصل عليها من مصفوفة الوحدة عن طريق ضرب الصف $j$ بالعنصر $r$، وجمع الناتج إلى الصف $i$. فالمصفوفة $H_{ij}(r)$ تحتوي على 1 في الأماكن القطرية، وتحتوي على $r$ في المكان $(i, j)$ وتحتوي على أصفار في الأماكن الأخرى.

(iv) تعرف $\overline{H}_{ij}(r)$ بنفس الطريقة التي عرفت بها $H_{ij}(r)$ مع تبديل كلمة «صف» بكلمة «عمود». في الواقع إن $\overline{H}_{ij}(r) = H_{ji}(r)$، ولكنه من المفيد أن نستعمل الرمزين.

إن $\det H_{ij}(r) = \det \overline{H}_{ij}(r) = 1$، $\det G_i(u) = u$ و $\det F_{ij} = -1$ وهكذا فمحددات جميع هذه المصفوفات عناصر وحدة في $R$، وبالتالي فإنه بالاستناد إلى (٧-٦) تكون جميع هذه المصفوفات قابلة للانعكاس.

**(٧-١١) مأخوذة**

*إن مفعول ضرب مصفوفة معطاة (من نوع مناسب) من اليسار بالمصفوفة:*

(١) $F_{ij}$ *هو تبديل الصف $i$ والصف $j$،*

(٢) $G_i(u)$ *هو ضرب الصف $i$ بالعنصر $u$،*

(٣) $H_{ij}(r)$ *هو ضرب الصف $j$ بالعنصر $r$ وجمع الناتج إلى الصف $i$.*

*إن مفعول ضرب مصفوفة معطاة (من نوع مناسب) من اليمين بالمصفوفة*

(٤) $F_{ij}$ *هو تبديل العمود $i$ والعمود $j$،*

(٥) $G_i(u)$ *هو ضرب العمود $i$ بالعنصر $u$،*

(٦) $\overline{H}_{ij}(r)$ *هو ضرب العمود $j$ بالعنصر $r$ وجمع الناتج إلى العمود $i$.*

**البرهــــان**

إن هذه حقائق بسيطة، وإننا نفضل أن نترك القارئ يقنع نفسه (على قصاصة من الورق) بصواب هذه الحقائق، على أن نحضر ترميزا مفصلا من أجل برهانها.

**(٧-١٢) تعريف**

*تعرف الفعاليات الموصوفة في (٧-١١) و (١) - (٣)، بالعمليات الصفية الابتدائية (elementary row operations) على مصفوفة، كما تعرف تلك الموصوفة في (٧-١١) و (٤) - (٦)، بالعمليات العمودية الابتدائية (elementary column operations).*

من المفيد أن نذكر أنه لإجراء عملية صفية ابتدائية، فإننا نجري تلك العملية على مصفوفة الوحدة المناسبة ثم نضرب من اليسار بالمصفوفة الناتجة؛ وبالمثل فإننا نضرب من اليمين عند إجراء العمليات العمودية. بما أن المصفوفات التي تنجز المهمات هي مصفوفات قابلة للانعكاس فإن كل عملية من هذه العمليات الابتدائية سوف تحول أية مصفوفة إلى مصفوفة مكافئة لها. إذن، نستطيع أن نبرهن أن مصفوفتين متكافئتان عن طريق إثبات أنه يمكن تحويل إحداهما إلى الأخرى بواسطة عمليات ابتدائية متتالية، وفي الوقت نفسه نترك المؤثرات المصفوفية الحقيقية تتراجع بعيدا عن الأنظار. إذا كان هناك أي سبب يجعلنا بحاجة إلى معرفة تسلسل المصفوفات المحولة فإننا نجري العمليات الصفية المتتالية المناسبة على مصفوفة الوحدة المناسبة من أجل الحصول على المؤثر الأيسر، ونجري العمليات العمودية على مصفوفة الوحدة المناسبة من أجل الحصول على المؤثر الأيمن. في الحقيقة، إن إجراء العمليات الصفية الابتدائية يتم عن طريق الضرب المتتالي من اليسار بمصفوفات ابتدائية $X_1, \ldots, X_k$؛ إن المفعول التراكمي لهذه العمليات يتم بواسطة الضرب من اليسار بـ $X = X_k \ldots X_1$، وإن هذه المصفوفة هي المصفوفة التي نحصل عليها عن طريق إجراء نفس متتالية العمليات الصفية على مصفوفة الوحدة.

### ٥ - برهان (٧-١٠) في حالة الحلقات الإقليدية

من المفيد أن نبرهن (٧-١٠) أولا في الحالة الخاصة بالحلقات الإقليدية، وذلك لأن هذا الوضع هو الذي سوف يكون موضع اهتمامنا عندما ندرس التطبيقات. علاوة على ذلك، إن البرهان الخاص بالحلقات الإقليدية أسهل نسبيا من البرهان الخاص بالحلقات التامة الرئيسة الاختيارية.

إذن، سوف نأخذ مصفوفة اختيارية $A$ من النوع $s \times t$ على حلقة إقليدية $R$ (مزودة بدالة إقليدية $\phi$)، وسوف نبين الكيفية التي يتم بها اختزال A بواسطة عمليات صفية ابتدائية وعمليات عمودية ابتدائية إلى مصفوفة من الشكل $\text{diag}(d_1, ..., d_u)$ حيث $u = \min\{s, t\}$ وحيث $d_1 | d_2 | \cdots | d_u$ . وسوف يثبت هذا (٧-١٠) في الحالة الخاصة التي تكون فيها $R$ حلقة إقليدية.

## مرحلة الاختزال الأولي

إن هدفنا في هذه المرحلة هو اختزال $A$ إلى مصفوفة مكافئة $C$ من النوع $s \times t$ ومن الشكل الخاص

$$C = \left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^* & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad (£)$$

حيث $d_1$ يقسم كل عنصر من عناصر $C^*$ . سوف نصف متتالية منتهية من العمليات الصفية الابتدائية والعمليات العمودية الابتدائية بحيث إذا أجرينا هذه المتتالية على $A$، فإننا نحصل على مصفوفة من الشكل (£) أو على مصفوفة $B = (b_{ij})$ من النوع $s \times t$ محققة للشرط

$$\phi(b_{11}) < \phi(a_{11}) \qquad (\$)$$

في الحالة الأخيرة، نعود إلى نقطة البداية ونطبق متتالية العمليات مرة ثانية. إما أن نصل إلى (£)، وفي هذه الحالة نتوقف، أو نصل إلى ($) مرة ثانية، وفي هذه الحالة نجد أن قيمة العنصر القائد بواسطة $\phi$ تقل، ثم نكرر هذه العملية. واضح أنه لا بد لنا أن نصل إلى ($) بعد عدد منته من الخطوات، لإنه إذا لم يتحقق ذلك فإن كل تطبيق لمتتالية العمليات يعيدنا إلى ($) كما أن قيم العناصر القائدة في المصفوفات بواسطة $\phi$ تكون متتالية من الأعداد الصحيحة غير السالبة، وهذه المتتالية غير منتهية ومتناقصة فعليا. ولكن بالطبع لا يمكن أن توجد مثل هذه المتتالية.

إن متتالية العمليات هي كما يلي : إذا كانت $A$ المصفوفة الصفرية فإن $A$ من الشكل (£) ؛ إذاكانت $A$ غير صفرية فإنه يوجد عنصر غير صفري في $A$، وعن طريق إجراء تبديلات مناسبة للصفوف وللأعمدة ، فإنه يمكن نقل هذا العنصر إلى الموضع القائد . إذن ، نفرض أن $a_{11} \neq 0$ ونعتبر الحالات الثلاث الممكنة التالية :

**الحالة (١)**

يوجد عنصر $a_{1j}$ في الصف الأول بحيث $a_{11} \nmid a_{1j}$ . بالاستناد إلى خواص الحلقات الإقليدية نستطيع أن نكتب

$$a_{1j} = a_{11} q + r$$

حيث $r = 0$ أو $\phi(r) < \phi(a_{11})$ . بما أن $a_{11} \nmid a_{1j}$ فإنه يجب أن يكون $r \neq 0$ وبالتالي فإن $\phi(r) < \phi(a_{11})$ . اضرب العمود الأول بالعنصر $q$ واطرح الناتج من العمود $j$ ثم بدل العمود الأول والعمود $j$. وهذا يستبدل العنصر القائد $a_{11}$ بالعنصر $r$، وبالتالي فإننا نصل إلى ($). 

**الحالة (٢)**

يوجد عنصر $a_{i1}$ في العمود الأول بحيث $a_{11} \nmid a_{i1}$ . في هذه الحالة ، نتبع طريقة الحالة (١) ، لكننا نتعامل مع الصفوف بدلا من الأعمدة فنصل إلى ($).

**الحالة (٣)**

$a_{11}$ يقسم كل عنصر في الصف الأول وكل عنصر في العمود الأول . في هذه الحالة ، نستطيع أن نستبدل جميع عناصر الصف الأول ما عدا $a_{11}$ بأصفار عن طريق طرح مضاعفات مناسبة للعمود الأول من الأعمدة الأخرى . بالمثل ، نطرح مضاعفات للصف الأول من الصفوف الأخرى ، وبالتالي فإننا نحصل على مصفوفة من الشكل

$$D=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

إذا كان $a_{11}$ يقسم كل عنصر في $D^*$، فإننا نكون قد وصلنا إلى (£)، وهذا ما نريد. وإذا لم يكن الأمر كذلك، فإنه يوجد عنصر $d_{ij}$ بحيث $a_{11} \nmid d_{ij}$. في تلك الحالة نجمع الصف $i$ إلى الصف العلوي ؛ ويعيدنا هذا إلى الحالة (١) وهذه بدورها تجعلنا نصل إلى ($).

إذن، لقد رتبنا الأمور بحيث تكون نتيجة كل من الحالات الثلاث مصفوفة مكافئة للمصفوفة $A$، وبحيث تكون تلك المصفوفة من الشكل (£) أو تحقق ($). وبتكرار تطبيق ما سبق، نصل إلى (£) بعد عدد منته من الخطوات، وبالتالي فإننا نكون قد أنجزنا مرحلة الاختزال الأولى.

### الانتهاء من الاختزال

من السهل أن نرى الكيفية التي توصلنا إلى الانتهاء من الاختزال، وذلك لأننا عندما نصل إلى (£)، نكون قد اختزلنا بشكل فعّال سعة المصفوفة التي نتعامل معها. عندئذ، نستطيع أن نطبق الطريقة على المصفوفة الجزئية $C^*$ فنختزل سعتها، وهلم جرا، تاركين متتالية من العناصر القطرية كلما تقدمنا. وهناك نقطتان مهمتان جديرتان بالذكر. النقطة الأولى هي أن أية عملية ابتدائية على $C^*$ تقابل عملية ابتدائية على $C$ لا تؤثر على الصف الأول ولا على العمود الأول. النقطة الثانية هي أن أية عملية ابتدائية على $C^*$ تعطينا مصفوفة جديدة عناصرها تركيبات خطية من العناصر القديمة ؛ وبالتالي فإن $d_1$ يقسم هذه العناصر الجديدة. إذن، في نهاية الأمر سوف نصل إلى مصفوفة من الشكل $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_u)$ حيث $d_1|d_2|\cdots|d_u$ كما هو مطلوب. في سبيل ايضاح هذه العملية فإننا، في نهاية الفصل، سوف نعطي التفاصيل الكاملة لمثال عددي.

### ملاحظة

إن المصفوفات $G_i(u)$ المذكورة في البند ٤ قد ضمنت في ذلك البند ابتغاء الكمال. عادة ما تحتوي قائمة العمليات الابتدائية على العمليات التي تقابل تلك

المصفوفات، ولكننا لم نستخدم تلك العمليات في عملنا المنجز أعلاه. وغالبا ما تكون تلك العمليات مهمة في حالات خاصة - على سبيل المثال، إذا كانت $R$ حقلا فإننا باستخدام تلك العمليات نستطيع أن نستبدل جميع العناصر غير الصفرية $d_i$ بالعنصر 1، وإذا كانت $R = \mathbb{Z}$ فإننا نستطيع أن نستخدم تلك العمليات من أجل استبدال جميع العناصر غير الصفرية $d_i$ بعناصر موجبة.

## ٦ - الحالة العامة

إن أسلوب البرهان - في هذه الحالة - لا يختلف كثيرا عن الأسلوب المتبع في البند ٥. إن الاختلاف الرئيسي هو أن العمليات الصفية الابتدائية والعمليات العمودية الابتدائية غير كافية لإنجاز الاختزال، وبالتالي فإن نوعا آخر من «العمليات الثانوية» سوف يكون له دور في عملية الاختزال.

إذا رغبنا أن نقلد البند ٥، فإن واجبنا الأول هو أن نجد شيئا يؤدي دور الدالة الإقليدية. من أجل ذلك، فإننا نعرف «دالة الطول» $\lambda$ على $R^*$ حيث $R$ حلقة تامة رئيسة. إذا كان $r \in R^*$ فإنه بالاستناد إلى (٤-١٤) يمكن كتابة $r$ على الشكل

$$r = up_1 \dots p_n$$

حيث $u$ عنصر وحدة، $p_i$ عناصر أولية في $R$ و $n \geq 0$. إن بعض ميزات هذه العبارة ميزات وحيدة، والعدد الصحيح $n$ هو من تلك الميزات الوحيدة. نعرف $\lambda$ بواسطة $\lambda(r) = n$ ونسمي $\lambda(r)$ «طول» (length) العنصر $r$. واضح أن

$$\lambda(r\,r') = \lambda(r) + \lambda(r') \quad \text{لكل} \quad r, r' \in R^* \qquad (6)$$

الآن، سوف نبين الكيفية التي يمكن بها اختزال أية مصفوفة اختيارية $A$ من النوع $s \times t$ على $R$ إلى مصفوفة قطرية من النوع المطلوب، وذلك بواسطة متتالية من العمليات التي تقابل كل عملية منها الضرب بمصفوفة قابلة للانعكاس.

### مرحلة الاختزال الأولي

كما سبق، تتألف هذه المرحلة من تطبيقات متعاقبة لمتتالية من العمليات المختارة بحيث يوصلنا كل تطبيق إلى $(\pounds)$ أو إلى الشرط الذي نحصل عليه عن طريق استبدال $\phi$ بدالة الطول $\lambda$ في $(\$)$.

نحتاج إلى تعديل متتالية العمليات فقط في الحالتين (١) و (٢)، وسنكتفي بشرح ما يحصل في الحالة (١). في هذه الحالة $a_{11} \neq 0$ ويوجد $j$ بحيث $1 < j \leq t$ وبحيث $a_{11} \nmid a_{1j}$. نستطيع أن نفرض أن $j = 2$ وذلك بواسطة تبديل الأعمدة ؛ إن هذا ليس إلا ترميزا مفيدا. بالاستناد إلى (٤-١٩) يوجد عامل مشترك أعلى $d$ للعنصرين $a_{11}$ و $a_{12}$. عندئذ يكون

$$a_{11} = dy_1 \ , \ a_{12} = dy_2 \tag{7}$$

وبما أن $a_{11} \nmid a_{12}$ فإن $y_1$ ليس عنصر وحدة. إذن $\lambda(y_1) \geq 1$ وبالاستناد إلى (6) يكون

$$\lambda(d) < \lambda(a_{11}) \tag{8}$$

باستخدام (٤-١٩) يكون $Ra_{11} + Ra_{12} = Rd$، وبالتالي فإنه يوجد $x_1 , x_2 \in R$ بحيث $d = x_1 a_{11} + x_2 a_{12}$. عندئذ بالاستناد إلى (7)، فإن $d = d(x_1 y_1 + x_2 y_2)$ وبالتالي فإن $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 1$. إذن، محدد المصفوفة

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} x_1 & -y_2 & \\ & & 0 \\ x_2 & y_1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1_{(t-2)} \end{array}\right]$$

والتي هي من النوع $t \times t$، هو 1، وبالاستناد إلى (٧-٦) إن هذه المصفوفة قابلة للانعكاس.

الآن، نعتبر المصفوفة $AS$. إنها مكافئة لـ $A$، وإن عنصرها القائد هو $x_1 a_{11} + x_2 a_{12} = d$. إذن، بالاستناد إلى (8)، إنها مصفوفة تحقق ($)، أو بالأحرى تحقق الشرط الذي نحصل عليه من ($) عن طريق استبدال الدالة $\phi$ بالدالة $\lambda$.

### الانتهاء من الاختزال

يتم ذلك تماما كما في الحالة الخاصة بالحلقات الإقليدية.

## ٧ – العوامل اللامتغيرة

لقد أثبتنا أن أية مصفوفة $A$ من النوع $s \times t$ على حلقة تامة رئيسة $R$ تكافئ مصفوفة من الشكل $\operatorname{diag}(d_1, ..., d_u)$ حيث $d_1 | \cdots | d_u$ . سنثبت في النهاية أن $A$ تعين العناصر القطرية $d_1, ..., d_u$ بشكل وحيد تقريبا ؛ في الحقيقة، إن تلك العناصر تعين تحت سقف العناصر المتشاركة. الآن، نرغب في إثبات ذلك ونبدأ بإعطاء تعريف قد يبدو محظورا عند النظرة الأولى.

**(٧–١٣) تعريف**

*لتكن $A$ مصفوفة من النوع $s \times t$ على $R$، وليكن $1 \le i \le min\{s, t\}$ . نعرف $J_i(A)$ بأنه المثالي في $R$ المولد بجميع المصغرات من النوع $i$ (i-minors) في $A$ .*

إذا كانت $A$ مصفوفة ما، فإن محدد أية مصفوفة جزئية من النوع $i \times i$ والتي نحصل عليها من $A$ عن طريق حذف عدد مناسب من الصفوف والأعمدة (مع تثبيت ترتيب الصفوف والأعمدة الباقية) يسمى مصغرا من النوع $i$ في $A$. وهكذا فإن مصغرا من النوع $i$ في $A$ هو عنصر في الحلقة التي تنتمي إليها عناصر $A$. وإننا نحذر القارئ هنا، أن كثيرا من المؤلفين يستخدم كلمة «مصغر» لوصف المصفوفة الجزئية نفسها ولا يستخدمها لوصف المحدد.

إن نص الوحدانية الذي نود أن نبرهنه هو عبارة عن نتيجة للمأخوذة التالية.

**(٧–١٤) مأخوذة**

*لتكن $A, B$ مصفوفتين من النوع $s \times t$ على $R$، ولنفرض أن $A$ و $B$ متكافئتان على $R$. عندئذ، إن $J_i(A) = J_i(B)$ لكل $1 \le i \le \min\{s, t\}$ .*

قبل أن نبرهن هذه المأخوذة سنبرر اهتمامنا بها بأن نستنتج منها نص الوحدانية الذي نود الوصول إليه.

**(٧-١٥) مبرهنة**

*لتكن $A$ مصفوفة من النوع $s \times t$ على $R$، ولتكن $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_u)$ و $D' = \operatorname{diag}(d'_1, ..., d'_u)$ مصفوفتين مكافئتين للمصفوفة $A$ على $R$، حيث $u = \min\{s, t\}$، $d_1|\cdots|d_u$ و $d'_1|\cdots|d'_u$ . عندئذ، إن $d_i \sim d'_i$ لكل $1 \le i \le u$ .*

**البرهـــان**

إن أي مصغر غير صفري من النوع $i$ في $D$ يكون من الشكل $d_{j_1} d_{j_2} ... d_{j_i}$ حيث $j_1 < j_2 < ... < j_i$. إن هذه العناصر قابلة للقسمة على المصغر $d_1\, d_2 ... d_i$ والذي هو من النوع $i$. إذن $J_i(D) = R(d_1 ... d_i)$ ؛ وبالمثل، إن $J_i(D') = R(d'_1 \ ... \ d'_i)$ . الآن، إن كلا من $D$ و $D'$ تكافئ $A$ وبالتالي فإنهما متكافئتان ؛ إذن باستخدام (٧-١٤) يكون $J_i(D) = J_i(D')$ . وبالتالي فإنه بالاستناد إلى (٤-٤) يكون

$$d_1 \ ... \ d_i \sim d'_1 \ ... \ d'_i \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, ..., u \qquad (9)$$

ضع $e_0 = 1$ وضع $e_i = d_1 ... d_i$ لكل $1 \le i \le u$ . بالمثل، عرف $e'_i$ . عندئذ، باستخدام (9) نجد أنه يوجد عنصر وحدة $v_i \in R$ بحيث $e_i = v_i\, e'_i (0 \le i \le u)$ . إذن، إذا كان $0 \le i < u$ فإن

$$e_{i+1} = d_{i+1}\, e_i = d_{i+1}\, v_i\, e'_i$$

وأيضا

$$e_{i+1} = v_{i+1}\, e'_{i+1} = v_{i+1}\, d'_{i+1}\, e'_i$$

وبالتالي فإن $d_{i+1}\, v_i = v_{i+1}\, d'_{i+1}$ و $d_{i+1} = v_i^{-1}\, v_{i+1}\, d'_{i+1}$ . إذن $d_{i+1} \sim d'_{i+1}$ .

لإثبات المأخوذة نبدأ بإعطاء الملاحظة التالية. لتكن $D$ مصفوفة من النوع $m \times m$ على $R$، وضع $D = (d_1, ..., d_m)$ حيث $d_1, ..., d_m$ هي أعمدة $D$. ليكن كل من $d'_1$ و $d''_1$ متجها عموديا طوله $m$ وعناصره من $R$، أي أن $d'_1$ و $d''_1$ مصفوفتان من النوع $m \times 1$ على $R$. عندئذ، إن

$$\det(d'_1 + d''_1,\ d_2,\ ...,\ d_m) = \det(d'_1, d_2,\ ...,\ d_m) + \det(d''_1, d_2,\ ...,\ d_m)$$

و $\det(rd_1, d_2, ..., d_m) = r\det(d_1, d_2, ..., d_m)$ لكل $r \in R$ .

من المحتمل أن تكون هذه الحقائق مألوفة للقارئ في حالة المصفوفات على حقل، وكما في تلك الحالة فإنه يمكن إثباتها عن طريق نشر المحدد بواسطة العمود الأول أو مباشرة عن طريق التعريف. كذلك فإن ملاحظات مشابهة تنطبق على الأعمدة الأخرى. فإذا كان لدينا مصفوفة $D$ من النوع $m \times m$ ووضعنا مكان عمودها رقم $i$ تركيبا خطيا من الأعمدة $e_1, \ldots, e_k$ على $R$، فإن محدد المصفوفة الناتجة يساوي تركيبا خطيا (على $R$) من محددات المصفوفات التي نحصل عليها من $D$ عن طريق استبدال العمود رقم $i$ بالأعمدة $e_1, \ldots, e_k$ على التعاقب. وإذا طبقنا هذا المبدأ على كل عمود تباعا فإننا نستطيع أن نصل إلى النتيجة التالية. لنفرض أنه قد أعطينا مجموعة من المتجهات العمودية $c_1, \ldots, c_l$ التي طولها $m$ وعناصرها من $R$. لتكن $\mathscr{S}$ هي مجموعة المصفوفات من النوع $m \times m$ التي يمكن تكوينها من هذه الأعمدة (حيث نسمح بالتكرار). الآن، لتكن $C$ أية مصفوفة من النوع $m \times m$ بحيث تكون أعمدتها تركيبات خطية من $c_1, \ldots, c_l$. عندئذ، إن $\det C$ هو تركيب خطي من عناصر من الشكل $\det W$ حيث $W \in \mathscr{S}$. إذن $\det C$ ينتمي إلى المثالي (في $R$) المولد بواسطة العناصر $\det W$ حيث $W$ تتغير على $\mathscr{S}$.

الآن، لتكن $A = (a_1, \ldots, a_t)$ أية مصفوفة من النوع $s \times t$ على $R$، ولتكن $X$ أية مصفوفة من النوع $t \times t$ على $R$. نعتبر $AX$. إن العمود رقم $i$ في هذه المصفوفة مشغول بالمتجه العمودي $\sum_{j=1}^{t} x_{ji}\, a_j$. نريد أن نفحص مصفوفة جزئية نموذجية $E$ من النوع $i \times i$ في $AX$. لتكن $J = \{j_1, \ldots, j_i\}$ هي مجموعة الصفوف المتضمنة في $E$ بحيث تكون مدونة بالترتيب الطبيعي. عندئذ، إن أعمدة $A$ تركيبات خطية من «أعمدة جزئية» في $A$؛ أي، تركيبات خطية من الأعمدة $a_k^J$ حيث يتم الحصول على $a_k^J$ عن طريق اختيار العناصر التي أرقامها $j_1, \ldots, j_i$ في $a_k$. إذن، إن المصغر المقابل $\det E$ من النوع $i$ هو تركيب خطي (على $R$) من العناصر

$$\det\left(a_{k_1}^J, \;\ldots,\; a_{k_i}^J\right) \qquad (10)$$

وهذه العناصر هي محددات مصفوفات جزئية من النوع $i \times i$ مكونة من اختيارات من الأعمدة $a_{k_l}^J$ . الآن، إن المحدد (10) يساوي صفرا إلا إذا كانت $k_1, ..., k_i$ مختلفة، وفي الحالة الأخيرة فإننا نستطيع أن نجعل ترتيب أعمدته نفس الترتيب الذي تظهر فيه تلك الأعمدة في $A$ عن طريق تغيير في الإشارة، وبالتالي فإن المحدد في الحالة الأخيرة يساوي + أو − مصغر من النوع $i$ في $A$. إذن، إذا كانت $E$ أية مصفوفة جزئية من النوع $i \times i$ في $AX$، فإن $\det E$ تركيب خطي من مصغرات من النوع $i$ في $A$، وبالتالي فإنه ينتمي إلى المثالي $J_i(A)$ المولد بواسطة هذه المصغرات. إذن

$$J_i(AX) \subseteq J_i(A)$$

كذلك، إذا أجرينا نقاشا مشابها مستخدمين الصفوف فإننا نجد أن

$$J_i(YA) \subseteq J_i(A)$$

لأية مصفوفة $Y$ من النوع $s \times s$. إذن

$$J_i(YAX) \subseteq J_i(A)$$

إذا كانت $Y$ و $X$ قابلتين للانعكاس وكانت $B = YAX$ فإن $A = Y^{-1}BX^{-1}$ وبالتالي فإن

$$J_i(A) \subseteq J_i(B)$$

إذن، إن هذين المثاليين متساويان وبالتالي فإن هذا يثبت المأخوذة (٧−١٤).

**ملاحظة**

كالعادة، لقد أعطينا نص المأخوذة (٧−١٤) بالنسبة إلى الحلقات التامة الرئيسة، ولكن المناقشة تظهر أن تلك المأخوذة صحيحة بالنسبة إلى أية حلقة إبدالية بمحايد.

**(٧−١٦) تعريف**

*لتكن $A$ مصفوفة من النوع $s \times t$ على $R$، ولتكن $D = \text{diag}(d_1, ..., d_u)$ مصفوفة قطرية مكافئة لـ $A$ على $R$ بحيث $d_1 | d_2 | \cdots | d_u$ . عندئذ، تسمى المتتالية $d_1, ..., d_u$ متتالية عوامل لا متغيرة (invariant factors) للمصفوفة $A$ على $R$. تسمى $\text{diag}(d_1, ..., d_u)$ مصفوفة عوامل لا متغيرة للمصفوفة $A$.*

الآن، يمكن تلخيص المبرهنتين (٧-١٠) و (٧-١٥) بالطريقة التالية :

**(٧-١٧) مبرهنة**

*تتكافأ مصفوفتان من النوع $s \times t$ على حلقة تامة رئيسة $R$ إذا وفقط إذا كان لهما (تحت سقف العناصر المتشاركة) نفس متتالية العوامل اللامتغيرة على $R$.*

**ملاحظة**

لقد عرفنا مفهوم التكافؤ بالنسبة إلى حلقة خاصة $R$، وهذا ما فعلناه سابقا مع مفاهيم أخرى. من الممكن أن تكون مصفوفتان عناصرهما من $R$ غير متكافئتين على $R$، ولكنهما متكافئتان على حلقة $S$ حيث $S$ أكبر من $R$ (انظر تمرين ٣).

## ٨ - الخلاصة ومثال محلول

عند هذه المرحلة، يمكن للقارئ أن يقدر تقديمنا عرضا موجزا لما قد حققناه في هذا الفصل الطويل. لقد كان هدفنا المعلن دراسة العلاقة بين $F$، حيث $F$ حلقية حرة وذات رتبة منتهية، و $N$، حيث $N$ حلقية جزئية؛ كذلك أردنا أن نثبت أنه يمكن اختيار أساس $\{f_1, ..., f_s\}$ لـ $F$ بحيث يكون $\{d_1f_1, ..., d_sf_s\}$ أساسا لـ $N$ لمجموعة مناسبة من العناصر $\{d_1, ..., d_s\}$ التي يقسم كل منها العنصر الذي يليه. وأثناء تلك الدراسة، أثبتنا أن رتبة حلقية حرة هي لامتغير حسن التعريف (٧-٢)، كما أثبتنا أن الحلقية الجزئية $N$ هي نفسها حرة (٧-٨)، وبالتالي أصبح من الممكن الحديث عن أساس لـ $N$.

لقد قرنا مصفوفة $A$ بأساسين معطيين $n$ و $f$ لـ $N$ و $F$ على الترتيب. كذلك، استطعنا أن نصف المصفوفات المقابلة لتغيير في الأساس عن طريق دراسة العلاقة بين التشاكلات الداخلية للحلقيات والمصفوفات. وعرفنا أن المصفوفة المقابلة لأساسين جديدين $n^*$ و $f^*$ لـ $N$ و $F$ تأخذ الشكل $XAY$؛ حيث كل من $X$ و $Y$ مصفوفة قابلة للانعكاس؛ أي تأخذ شكل مصفوفة مكافئة لـ $A$. الآن، نستطيع ترجمة المسألة الأصلية

إلى مسألة عن المصفوفات ؛ ببساطة ، لقد كان علينا أن نبرهن أن $A$ مكافئة لـ$\operatorname{diag}(d_1, ..., d_u)$.

لقد عرفنا العمليات الابتدائية بحيث تقابل الضرب من اليسار أو من اليمين بمصفوفة قابلة للانعكاس ، وبالتالي فإن تطبيق عمليات ابتدائية على مصفوفة ، كان ينتج مصفوفة مكافئة لها . ثم تسلحنا بالعمليات الابتدائية من أجل اختزال $A$ إلى الشكل القطري المطلوب . في حالة الحلقات الإقليدية ، كان من السهل إثبات أنه يمكن تنفيذ هذا الاختزال في عدد منته من الخطوات ، وذلك بمساعدة الدالة الإقليدية $\phi$ . حتى نحقق ذلك بالنسبة إلى حلقة تامة رئيسة اختيارية ، كان علينا أن نجد بديلا للدالة $\phi$ ؛ لقد ساعدنا في ذلك ، الدراسة التي قمنا بها في الفصل الرابع حول وحدانية التحليل في الحلقات التامة الرئيسة ، ولقد جعلتنا هذه الدراسة قادرين على تعريف دالة الطول على الحلقة . ثم استندنا إلى عملية إضافية وأجرينا تعديلا طفيفا على دراستنا السابقة من أجل أن نتم البرهان في الحالة العامة . أخيرا ، أثبتنا أن العناصر $d_1|d_2|\cdots|d_u$ هي عناصر معينة بشكل وحيد تحت سقف العناصر المتشاركة .

سوف نختم هذا الفصل بإعطاء بعض الأمثلة العددية وذلك من أجل توضيح الكيفية التي تعمل بها طريقة الاختزال المعطاة في البند (٥) .

**مثال محلول**

لتكن

$$T = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفتين $X$ و $Y$ من النوع $3 \times 3$ على $\mathbb{Z}$ بحيث تكون $XTY$ مصفوفة عوامل لامتغيرة للمصفوفة $T$ .

إن واجبنا الأول هو أن نختزل $T$ إلى مصفوفة عوامل لامتغيرة عن طريق العمليات الابتدائية الصفية والعمودية . بما أننا نريد أن نحصل على $X$ و $Y$ فإنه يجب

علينا أن نتذكر تسلسل العمليات المستخدمة . فيما يلي نعطي ترميزا مختصرا من أجل وصف هذه العمليات .

$R_i \leftrightarrow R_j$ تعني تبديل الصف $i$ والصف $j$،

$R_i + cR_j$ تعني ضرب الصف $j$ بالعنصر $c$ وجمع الناتج إلى الصف $i$،

$uR_i$ تعني ضرب الصف $i$ بعنصر الوحدة $u$ ($u = \pm 1$ في الحالة التي ندرسها الآن) .

تتعلق هذه الرموز بالعمليات الابتدائية الصفية . كذلك ، هناك ترميز مشابه للعمليات الابتدائية العمودية ونحصل عليه بواسطة وضع $C$ مكان $R$ .

إن أسرع طريقة لبدء الاختزال (رغم أنها ليست ضرورية) هي أن نجد عنصرا غير صفري بحيث تكون قيمته بواسطة $\phi$ أصغر ما يمكن ، ثم نحضره إلى المكان القائد . إذن ، نجد أن

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow R_3 \longleftrightarrow R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \left.\begin{matrix} R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 7R_1 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \left.\begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ C_3 - 3C_1 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

ويوصلنا هذا إلى (£) . الآن ، بما أن الصف الأول والعمود الأول لا يتغيران ، فإننا نستطيع أن نطمسهما على شرط أن نواصل ترقيم الصفوف والأعمدة كصفوف وأعمدة في المصفوفة الأصلية . إذن ، نواصل كما يلي :

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow R_3 - 2R_2 \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} C_3 - 2C_2 \\ -1 \times C_2 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن، لقد اختزلنا المصفوفة $T$ إلى المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $1, 3, 0$ متتالية عوامل لامتغيرة للمصفوفة $T$ على $\mathbb{Z}$.

لايجاد المصفوفة $X$، فإننا نطبق العمليات الابتدائية الصفية المستخدمة أعلاه على مصفوفة الوحدة $1_3$، ولإيجاد $Y$ نطبق العمليات العمودية على $1_3$. يستطيع القارئ أن يتأكد بسهولة أن تطبيق العمليات يعطي

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن المفيد أن يتأكد من صحة الحسابات عن طريق حساب حاصل الضرب $XTY$ مباشرة.

إذا بدأنا بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فإننا نحصل على أحد الأوضاع السهلة التي تظهر فيها الحالة (٣). في تلك الحالة، نجد أن الطريقة التالية هي إحدى طرق الاختزال.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow R_1 + R_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \left.\begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ R_2 - 3R_1 \\ -1 \times R_2 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $1, 6$ متتالية عوامل لامتغيرة في هذه الحالة.

## تمارين على الفصل السابع

١ - لتكن

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفتين $X$ و $Y$ على $\mathbb{Z}$ بحيث تكون $XAY$ مصفوفة عوامل لامتغيرة للمصفوفة $A$ على $\mathbb{Z}$.

٢ - احسب مصفوفة عوامل لامتغيرة على $\mathbb{Q}[x]$ لكل من المصفوفتين

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1-x & 1+x & x \\ x & 1-x & 1 \\ 1+x & 2x & 1 \end{bmatrix}$$

٣ - ماذا تعني علاقة التكافؤ بالنسبة إلى المصفوفات من النوع $1 \times 1$؟ أعط مثالا لمصفوفتين على $\mathbb{Z}$ بحيث تكونان غير متكافئتين على $\mathbb{Z}$ لكنهما متكافئتان على $\mathbb{Q}$.

٤ - أثبت أن كل مصفوفة من النوع $s \times t$ على حقل $K$، تكافئ على $K$ مصفوفة من الشكل $\text{diag}(1, 1, ..., 1, 0, ..., 0)$. أوجد عدد فصول التكافؤ التي تنقسم إليها المجموعة المكونة من جميع المصفوفات من النوع $s \times t$ على $K$ بالنسبة إلى علاقة التكافؤ على $K$.

٥ - لتكن $R$ حلقة تامة رئيسة، ولتكن $A$ مصفوفة من النوع $n \times n$ على $R$. أثبت أن $A$ قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا كانت $A$ تكافئ مصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$ على $R$. أثبت أنه إذا كانت $R$ حلقة إقليدية، فإن المصفوفات الابتدائية من النوع $n \times n$ تولد الزمرة المكونة من جميع المصفوفات القابلة للانعكاس من النوع $n \times n$ على $R$. إذا كانت $R$ حلقة تامة رئيسة، فما هي النتيجة المقابلة؟.

٦ - لتكن $A$ هي المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1+i & 1-i \\ 8+6i & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

والتي تنتمي عناصرها إلى حلقة أعداد جاوس $R$. أوجد مصفوفتين مربعتين $X$ و $Y$ على $R$ بحيث تكون $XAY$ مصفوفة عوامل لامتغيرة للمصفوفة $A$ على $R$. ما الجواب إذا استبدلنا $\mathbb{C}$ بـ $R$ ؟

٧ - لتكن $R$ حلقة تامة. أثبت أنه إذا كانت $A$ مجموعة جزئية من $({}_RR)^n$ بحيث $A$ مستقلة خطيا على $R$، فإن عدد عناصر $A$ أقل من أو يساوي $n$.
(**إرشاد:** اطمر $R$ في حقل كسورها $K$ المنشأ كما في البند (١) من الفصل الرابع واعتبر أن $({}_RR)^n$ مطمورة في $K^n$)

٨* - لتكن $F$ حلقية حرة على حلقة تامة رئيسة $R$ وليكن $\{f_1, ..., f_n\}$ أساسا لـ $F$. نفرض أن $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ عناصر عددها $n$ وعاملها المشترك الأعلى هو $[1]$.

ليكن $f = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i$ . بالاستناد إلى (٧-١) أثبت أنه توجد حلقية جزئية $F^*$ من $F$ بحيث $F = Rf \oplus F^*$. استنتج أنه توجد مصفوفة قابلة للانعكاس من النوع $n \times n$ على $R$ بحيث يكون عمودها الأول هو $r_1, ..., r_n$.

٩* - أثبت أن

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ x & 2 \end{bmatrix}$$

غير مكافئة على $\mathbb{Z}[x]$ لمصفوفة قطرية. (**إرشاد:** اعتبر المثاليات $(J_i(A))$.

# الفصل الثامن

## مبرهنات التفريق

الآن، نحن في وضع مناسب لصياغة المبرهنة الرئيسة في هذا الكتاب وإثباتها. تعطي هذه المبرهنة معلومات تفصيلية حول بنية الحلقيات المولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة $R$. وفي الحقيقة، إنها تؤدي إلى تصنيف لهذه الحلقيات (بدلالة بعض المتتاليات التي تنتمي عناصرها إلى $R$)، وذلك عن طريق التعبير عن تلك الحلقيات كمجاميع مباشرة لبعض الحلقيات الجزئية الدوروية. في هذا الفصل سوف نبين الكيفية التي يُصفَّى بها هذا الجمع المباشر إلى صيغته الأساسية حيث لا يمكن تفريق المركبات. في كل مرحلة سوف نلقي نظرة ثاقبة على وحدانية التفريقات (decompositions) المتنوعة التي نحصل عليها.

### ١ – المبرهنة الرئيسة

نحتاج أولا إلى مأخوذة بسيطة تتعلق بالمجاميع المباشرة للحلقيات على حلقة بمحايد.

**(٨–١) مأخوذة**

*لتكن $L$ حلقية على الحلقة $R$، وافرض أن $L$ مجموع مباشر داخلي للحلقيات الجزئية $L_i$. $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ لكل $i$ افرض أن $N_i$ حلقية جزئية من $L_i$*

*وافرض أن* $N = \sum_{i=1}^{t} N_i$ *. عندئذ، إذا كان* $v$ *هو التشاكل الطبيعي* $L \to L/N$ *فإن :*

$$L/N = v(L) = v(L_1) \oplus \ldots \oplus v(L_t) \text{ و } v(L_i) \cong L_i/N_i$$

**البرهان**

إذا كان $l \in L$، فإن $l = \sum_{i=1}^{t} l_i$ حيث $l_i \in L_i$ وبالتالي فإن

$v(l) = \sum_{i=1}^{t} v(l_i) \in \sum_{i=1}^{t} v(L_i)$ . إذن $v(L) = \sum_{i=1}^{t} v(L_i)$ . لإثبات أن هذا المجموع مباشر

نفرض أن $x \in v(L_i) \cap \sum_{j \neq i} v(L_j)$ . عندئذ، فإن $x = v(l_i') = \sum_{j \neq i} v(l_j')$ حيث

$l_k' \in L_k$ . إذن $v\left(l_i' - \sum_{j \neq i} l_j'\right) = 0$ وبالتالي فإن $l_i' - \sum_{j \neq i} l_j' \in \ker v = N = \Sigma N_i$ .

إذن $l_i' - \sum_{j \neq i} l_j' = \sum_{k=1}^{t} n_k$ حيث $n_k \in N_k$ . بما أن $\Sigma L_i$ مجموع مباشر فإننا نجد أن

$l_i' = n_i \in N_i \subseteq \ker v$ ، وبالتالي فإن $x = v(l_i') = 0$ . إذن $v(L) = v(L_1) \oplus \ldots \oplus v(L_t)$ .
الآن، إن قيد نواة $v$ على $L_i$ يساوي $N \cap L_i = N_i$، وبالتالي فإننا بالاستناد إلى (٥-١٠) نجد أن $v(L_i) \cong L_i/N_i$ .

الآن نتقدم نحو النتيجة الرئيسة.

**(٨-٢) مبرهنة**

*لتكن* $R$ *حلقة تامة رئيسة، ولتكن* $M$ *حلقية مولدة نهائيا على* $R$*. عندئذ، يمكن التعبير عن* $M$ *كمجموع داخلي مباشر*

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s \qquad (s \geq 0)$$

حيث

(أ) $M_i$ حلقية جزئية غير تافهة ودوروية من $M$ ومرتبتها $d_i$، و

(ب) $d_1 | d_2 | \cdots | d_s$ .

**ملاحظات**

١ - نذكر بأنه حسب اصطلاحاتنا ، فإن الحلقية الصفرية هي مجموع مباشر للمجموعة الخالية من الحلقيات الجزئية .

٢ - حتى الآن ، لقد عرفنا فقط مثالي الترتيب $\mathbf{o}(N)$ لحلقية دوروية $N$ على $R$. من ناحية أخرى ، إذا كانت $R$ حلقة تامة رئيسة ، فإن $\mathbf{o}(N)$ مثالي رئيسي ، وبالتالي له الشكل $dR$ حيث $d \in R$ . وبالاستناد إلى (٤-٤) نجد أن $d$ مُعَيَّن تحت سقف عامل هو عنصر وحدة ويسمى $d$ مرتبة للحلقية $N$. نقول إن $N$ من المرتبة $d$(order) . إذا كان $N = Rn$ و $r \in R$ ، فإن $d|r \Leftrightarrow r \in \mathbf{o}(N) \Leftrightarrow r\,n = 0$ . وكما أشرنا سابقا فإن رتبة الزمرة الدوروية المنتهية بالمعنى المعتاد لنظرية الزمر هي المولد الموجب لمثالي الترتيب الذي يخصها وبالتالي فإنها مرتبة بالمعنى الذي وصف أعلاه .

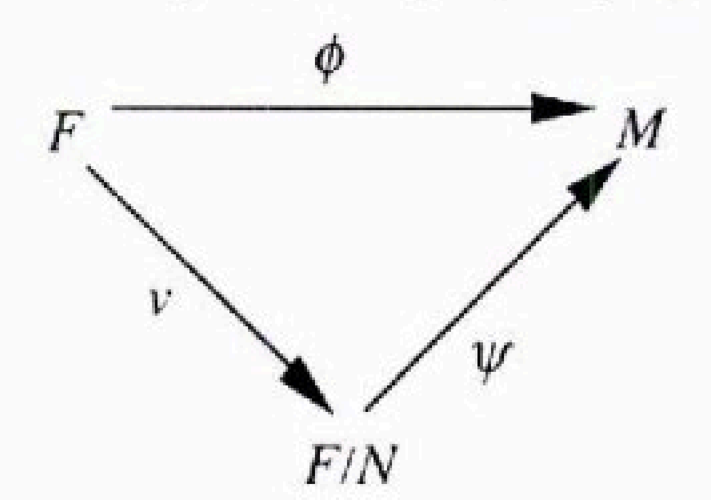
٣ - لتكن $Z = Rz$ حلقية دوروية على $R$، وليكن $J = dR$ مثالي الترتيب للحلقية $Z$ . عندئذ، إن $\{0\} = Z \Leftrightarrow J = R \Leftrightarrow d$ عنصر وحدة . إذن، إن قولنا إن جميع $M_i$ غير تافهة ، يكافئ قولنا إن جميع $d_i$ ليست عناصر وحدة .

٤ - إن الشرط $d_1 | \cdots | d_s$ مكافئ للشرط $\mathbf{o}(M_s) \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{o}(M_1)$ .

٥- لتكن $M$ حلقية على حلقة تامة رئيسة $R$. إذا كان $x \in M$ و $\mathbf{o}(x) = dR$ فإننا نقول إن $x$ من المرتبة $d$ .

**إثبات المبرهنة**

لتكن $M$ حلقية مولدة نهائيا على $R$ . عندئذ ، بالاستناد إلى (٦-١٠) ، فإنه يوجد تشاكل غامر $\phi : F \to M$ حيث $F$ حلقية حرة على $R$ وحيث رتبة $F$ منتهية . لتكن رتبة $F$ هي $t$ وضع $N = \ker\phi$. عندئذ، بالاستناد إلى (٥-٩) فإنه يوجد تماثل $\psi : F/N \to M$ بحيث يكون الشكل




إبداليا، حيث $\nu$ هو التشاكل الطبيعي. الآن، بالاستناد إلى (٧-١) فإنه يوجد أساس $\{f_1, ..., f_t\}$ لـ $F$ وتوجد عناصر $c_1|c_2|\cdots|c_t$ في $R$ بحيث تكون $N$ مولدة بالعناصر $c_1f_1, ..., c_tf_t$. إذن

$$N = R(c_1f_1) \oplus ... \oplus R(c_tf_t) \text{ و } F = Rf_1 \oplus ... \oplus Rf_t$$

حيث من الممكن أن تكون بعض العناصر $c_if_i$ تساوي 0. بالاستناد إلى (٨-١) فإن $F/N$ هي مجموع مباشر لحلقياتها الجزئية الدوروية $\nu(Rf_i) = R\nu(f_i)$. الآن، إن $\nu(f_i)$ من المرتبة $c_i$ وذلك لأنه إذا كان $r \in R$ فإن

$$r\nu(f_i) = 0 \Leftrightarrow \nu(rf_i) = 0 \Leftrightarrow rf_i \in N \Leftrightarrow c_i|r$$

وبالتالي فإننا نجد أن:

$$F/N = R\nu(f_1) \oplus ... \oplus R\nu(f_t) \qquad (1)$$

حيث $\nu(f_i)$ من المرتبة $c_i$ وحيث $c_1|c_2|\cdots|c_t$. بما أن $\psi$ تماثل فإنه يقرن التفريق المباشر (1) لـ $F/N$ بتفريق مباشر لـ $M$. الآن، نريد أن نحذف المجمعات التافهة. ليكن $u$ هو آخر عدد صحيح $i$ بحيث يكون $c_i$ عنصر وحدة. عندئذ، بالاستناد إلى شرط القسمة نجد أن $c_1, ..., c_u$ عناصر وحدة، وبالتالي فإن الحلقيات المقابلة في (1) هي حلقيات صفرية ويمكن حذفها. إذن، إذا كان $s = t - u$ فإن:

$$M = M_1 \oplus ... \oplus M_s$$

حيث $M_i = R\psi\nu(f_{u+i}) = R\phi(f_{u+i})$ هي حلقية دوروية غير تافهة من المرتبة $d_i = c_{u+i}$ و $d_1|d_2|\cdots|d_s$. إن هذا ينهي الإثبات.

**(٨-٣) نتيجة**

*مع فرضيات المبرهنة (٨-٢)، فإن $M = T \oplus F$ حيث $T$ هي حلقية الفتل الجزئية في $M$ و $F$ هي حلقية جزئية حرة وذات رتبة منتهية.*

**البرهـــــان**

نعلم من (٦-٥) أنه إذا كانت $T$ مجموعة عناصر الفتل في $M$، فإن $T$ حلقية جزئية من $M$ - إن هذا ما نعنيه بحلقية الفتل الجزئية في $M$. في تفريق $M$ المعطى في (٨-٢) نفرض أن $l + 1$ أول عدد صحيح $j$ بحيث $d_j = 0$. عندئذ، بالاستناد إلى (٨-٢)(ب)، يكون $d_{l+1} = ... = d_s = 0$ وبالتالي فإن كلا من $M_{l+1}, ..., M_s$ هي حلقية دوروية عديمة الفتل. إذن، بالاستناد إلى (٦-٨) تكون $F = M_{l+1} \oplus ... \oplus M_s$ حرة ورتبتها $s - l$. ليكن $T^* = M_1 \oplus ... \oplus M_l$، عندئذ، واضح أن $M = T^* \oplus F$، وندعي أن $T = T^*$. لإثبات هذا نفرض أن $m \in T^*$. عندئذ $m = m_1 + ... + m_l$ حيث $m_i \in M_i$، وبما أن $d_i$ يقسم $d_l$ لكل $i \leq l$ فإن $d_l m = d_l m_1 + ... + d_l m_l = 0$. بما أن $d_l \neq 0$ فإن هذا يبين لنا أن كل عنصر في $T^*$ هو عنصر فتل، وبالتالي فإن $T^* \subseteq T$. من الناحية الأخرى، لنفرض أن $n$ هو أي عنصر فتل في $M$. عندئذ، بما أن $M = T^* \oplus F$ فإن $n = t+f$ حيث $t \in T^*$ و $f \in F$. بما أن $n$ عنصر فتل، فإنه يوجد $0 \neq r \in R$ بحيث $rn = 0$. إذن $rt + rf = 0$. بما أن $T^* \oplus F$ مجموع مباشر، فإن $rf = 0$. ولكن $F$ عديمة الفتل، وبالتالي فإن $f = 0$. إذن $n \in T^*$، وبالتالي فإن $T = T^*$ كما ادعينا.

**ملاحظة**

إن الحلقية الجزئية $F$ المذكورة في (٨-٣)، بصفة عامة، ليست وحيدة. فمثلا، إذا اعتبرنا $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ حلقية على $\mathbb{Z}$ فإن حلقية الفتل الجزئية $T$ هي الحلقية الجزئية الدوروية المولدة بـ $(1, 0)$. إن القارئ يستطيع أن يتحقق بسهولة من أن العنصرين $(0, 1)$ و $(1, 1)$ يولدان حلقيتين جزئيتين دورويتين $F$ و $F^*$ بحيث $M = T \oplus F = T \oplus F^*$ كما يستطيع إثبات أن $F \neq F^*$.

**(٨-٤) نتيجة**

*كل حلقية عديمة الفتل ومولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة $R$ تكون حرة.*

## البرهـــان

إذا استخدمنا الترميز المستخدم في (٨-٣) فإنه إذا كانت $M$ عديمة الفتل فإن $T = \{0\}$ وبالتالي فإن $M = F$. إذن $M$ حرة.

## أمثلـــة

من الأمور المثيرة للاهتمام أن نبحث فيما إذا كانت مبرهنة ما تبقى صحيحة إذا بدلنا فرضياتها بفرضيات أضعف. الآن، سنثبت أنه لا يمكن إضعاف فرضيات المبرهنة (٨-٢).

١ - إن الفرضية التي تنص على أن $R$ حلقة تامة رئيسة هي فرضية غير فائضة. لإثبات ذلك، لتكن $R = \mathbb{Z}[x]$. عندئذ، إن أية مجموعة مستقلة خطيا في $_RR$ لا تحتوي على أكثر من عنصر واحد. ذلك لأنه إذا كان $a$ و $b$ عنصرين غير صفريين في $R$ فإن $ab - ba = 0$ ؛ وهذه علاقة خطية غير تافهة بين $a$ و $b$. ليكن $J = 2R + xR$ هو المثالي المولد بـ $2$ و $x$ في $R$. عندئذ، إذا اعتبرنا $J$ حلقية جزئية في $_RR$، فإنه يمكن توليد $J$ بعنصرين. الآن، بالاستناد إلى تمرين ٨ في الفصل الرابع نجد أن $J$ غير رئيسي؛ أي أن $J$ ليست حلقية جزئية دوروية في $_RR$. إذن، لو كان $J$ مجموعا مباشرا لحلقيات دوروية فإن هذه الحلقيات ستكون عديمة الفتل (وذلك لأن $_RR$ عديمة الفتل) وسيكون هناك حلقيتان على الأقل، عندئذ، سيكون مولدا اثنتين من هذه الحلقيات مستقلين خطيا، وقد رأينا أن ذلك مستحيل. (من الممكن أن نستخدم أية حلقة تامة بحيث لا تكون حلقة تامة رئيسة بدلا من $\mathbb{Z}[x]$ في المناقشة السابقة).

٢ - من الواضح أنه لا يمكن حذف الفرضية التي تنص على أن $M$ مولدة نهائيا، وذلك لأنه إذا كانت حلقية ما مجموعا مباشرا لعدد منته من الحلقيات الجزئية الدوروية فإنها مولدة نهائيا. بما أننا لم نناقش المجاميع المباشرة غير المنتهية فإننا لا نستطيع أن نتابع مناقشة هذه المسألة هنا.

## ٢ – وحدانية التفريق

ماذا يعني السؤال فيما إذا كان تفريق مباشر لحلقية ما وحيدا أم لا ؟ بالنسبة إلى نمط التفريق الموصوف في (٨-٢) فإنه يمكن التعبير عن هذا السؤال، في أصلب شكل، كما يلي :

إذا كان يوجد تفريقان من الشكل

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r = M'_1 \oplus \cdots \oplus M'_s$$

حيث $M_i$ و $M'_i$ حلقيات جزئية دوروية غير تافهة في $M$ وبحيث $\mathbf{o}(M_1) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{o}(M_r)$ و $\mathbf{o}(M'_1) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{o}(M'_s)$ فهل هذا يقتضي دائما أن $r = s$ ، وأن $M_i = M'_i$ لكل $i = 1, ..., r$ ؟

الإجابة البسيطة عن هذا السؤال تكون لا ؛ لأنه إذا كان لدينا تفريق من ذلك النمط، بحيث يكون لبعض مركباته نفس مثالي الترتيب، فمن الواضح أننا نستطيع الحصول على تفريق آخر من نفس النمط بواسطة إجراء تبديل على المركبات. فمثلا إذا كان $M = Z_1 \oplus Z_2$ المجموع الداخلي المباشر لنسختين $Z_i$ من الحلقية $\mathbb{Z}$، حيث $\mathbb{Z}$ حلقية على $\mathbb{Z}$، فإن $M = Z_2 \oplus Z_1$ تفريق آخر، وكل من التفريقين له الشكل الموصوف في (٨-٢).

وحتى إذا أضعفنا متطلبات الوحدانية قليلا بأن نطلب مساواة الحلقيات $M_i$ للحلقيات $M'_j$ ولكن بترتيب ما بدلا من $M_i = M'_i$ فإن الإجابة عن السؤال تبقى لا . وذلك لسبب بسيط هو أننا نستطيع أن نختار أساسا لحلقية حرة بطرق متعددة. فمثلا، إذا اعتبرنا المجموع الخارجي المباشر $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ لـ $\mathbb{Z}$ مع نفسها فإن $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(1, 0) \oplus \mathbb{Z}(0, 1)$ هو تفريق من النمط الموصوف في (٨-٢). ولكن، كما رأينا في البند الثاني من الفصل السابع فإنه إذا كانت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مصفوفة على $\mathbb{Z}$ بحيث يكون محددها $\pm 1$ فإن $\mathbb{Z}(a, c) \oplus \mathbb{Z}(b, d)$ تفريق مباشر آخر من الشكل المطلوب كما أن مثالي الترتيب لكل من المجمعين الدورويين هو الصفر .

وحتى بالنسبة إلى حلقيات الفتل، فإن الإجابة عن سؤالنا تبقى سلبية. فمثلا، ليكن $M = A \oplus B$ هو المجموع الداخلي المباشر لزمرتين دورويتين $A = \mathbb{Z}a$ و $B = \mathbb{Z}b$ من الرتبة 2، ونعتبر $M$ حلقية على $\mathbb{Z}$ كما هو معتاد. إن هذا تفريق من النمط (٨-٢) لأن $\mathbf{o}(A) = \mathbf{o}(B) = 2\mathbb{Z}$ ولكن $M = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}(a+b)$ تفريق آخر من هذا النمط وإن كلا من مجمعيه المباشرين لا يساوي $B$. وبالتالي فإنه لا يوجد أمل لإنقاذ هذا المفهوم البسيط للوحدانية بالنسبة إلى التفريقات الموصوفة في (٨-٢).

بالرغم من الإجابات السلبية السابقة، فإنه توجد إجابات إيجابية ومفيدة عن السؤال التالي: ما درجة وحدانية التفريق؟ فمثلا، إن عدد المجمعات في التفريق هو لامتغير للحلقية، وهناك لامتغير آخر هو المتتالية المتداخلة $\{\mathbf{o}(M_i)\}$ المكونة من مثاليات الترتيب التي تظهر في (٨-٢). سوف نثبت المبرهنة التالية:

**(٨-٥) مبرهنة**

*لتكن $R$ حلقة تامة رئيسة، ولتكن $M$ حلقية على $R$. ليكن $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s = M'_1 \oplus \cdots \oplus M'_t$ تفريقين مباشرين لـ $M$ حيث $M_i$ حلقية دوروية غير تافهة من المرتبة $d_i$ و $M'_j$ حلقية دوروية غير تافهة من المرتبة $d'_j$، $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$ و $d'_1 \mid d'_2 \mid \cdots \mid d'_t$. عندئذ، إن $s = t$ و $Rd_i = Rd'_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, s$. بوجه خاص، إن $d_i$ و $d'_i$ متشاركان.*

بناء على هذه المبرهنة فإننا سنعطي بعض التعاريف.

**(٨-٦) تعاريف**

*لتكن $M$ حلقية مولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة $R$. عندئذ، بالاستناد إلى (٨-٢)، فإننا نستطيع التعبير عن $M$ بالشكل $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s$؛ حيث $M_i$ حلقية دوروية غير تافهة من المرتبة $d_i$ و $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$. وبالاستناد إلى (٨-٥) فإن المتتالية $d_1, d_2, \ldots, d_s$ معينة تحت سقف عوامل هي عناصر وحدة نسميها متتالية من العوامل اللامتغيرة (invariant factors) لـ $M$. لاحظ أن العوامل اللامتغيرة لمصفوفة يمكن أن تكون عناصر وحدة، ولكن بناء على هذا التعريف، فإن العوامل اللامتغيرة لحلقية، لا يمكن أن تكون عناصر وحدة.*

*ليكن $l + 1$ أول عدد صحيح $i$ بحيث $d_i = 0$. عندئذ، $d_{l+1} = ... = d_s = 0$ وبالاستناد إلى (٨-٥)، يتم تعيين العددين الصحيحين $l$ و $s - l$ بشكل وحيد بواسطة الحلقية $M$، نسمي $s - l$ الرتبة الحرة من الفتل (torsion-free rank) لـ $M$. وتسمى المجموعة المرتبة $d_1, ..., d_l$ متتالية من لامتغيرات الفتل (torsion invariants) لـ $M$. واضح أنه يمكن الحصول على متتالية من العوامل اللامتغيرة لحلقية إذا كنا نعرف لامتغيرات الفتل للحلقية والرتبة الحرة من الفتل للحلقية.*

**ملاحظات**

١ - إذا استخدمنا الترميز المذكور أعلاه، واستندنا إلى النقاش المستخدم في (٨-٣) فإن $M = T \oplus F$ حيث $F$ حرة ومن الرتبة $s - l$ و $T = M_1 \oplus ... \oplus M_l$ هي حلقية الفتل الجزئية في $M$. إذن

$$M/T = F \oplus T/T \cong F/F \cap T = F/\{0\} \cong F$$

إذن، إذا كان لدينا أي تفريق لـ $M$ كما في (٨-٥)، فإن عدد المجمعات الدوروية عديمة الفتل يكون رتبة الحلقية الحرة $M/T$، وبالتالي فإنه يتم تعيينه بشكل وحيد بواسطة $M$. والرتبة الحرة من الفتل لـ $M$ هي رتبة الحلقية الحرة $M/T$.

٢ - إن المبرهنتين (٨-١) و (٨-٥) تعطيانا تصنيفا (classification) للحلقيات المولدة نهائيا على حلقةتامة رئيسة $R$. وبالاستناد إلى هاتين المبرهنتين، فإن كل حلقية $M$ من هذا النوع تعين عددا صحيحا $s \geq 0$ وتعين متتالية

$$[d_1] \,|\, [d_2] \,|\, \cdots \,|\, [d_s] \qquad (2)$$

من فصول العناصر المتشاركة في $R$، حيث كل $d_i$ ليس عنصر وحدة في $R$. إذا كانت $M$ و $M'$ حلقيتين متماثلتين، فإنهما تعينان نفس المتتالية بالاستناد إلى (٨-٥). بالعكس، إذا كانت $M$ و $M'$ تقابلان نفس المتتالية (2)، فإن $M = M_1 \oplus ... \oplus M_s$ و $M' = M'_1 \oplus \cdots \oplus M'_s$ حيث كل من $M_i$ و $M'_i$ دوروية ومن المرتبة $d_i$. إذن، بالاستناد إلى (٦-١١) فإن $M_i \cong M'_i$، وبالتالي فإن $M \cong M'$. أخيرا، نلاحظ أن كل متتالية من الشكل (2) تقابل

حلقية، وهذه الحلقية هي المجموع الخارجي المباشر لحلقيات دوروية من المراتب $d_1, ..., d_s$. طبعا، إن $_R(R/Rd_i)$ مثال على حلقية دوروية من المرتبة $d_i$. إذن يوجد تقابل واحد لواحد بين فصول التماثل للحلقيات المولدة نهائيا على $R$ من جهة، والمتتاليات من الشكل (2) من جهة ثانية.

الآن، يجب علينا أن نثبت المبرهنة (٨-٥)؛ سنفعل ذلك عن طريق استنتاجها من المبرهنة التي تعطينا وحدانية العوامل اللامتغيرة لمصفوفة. لتكن $F$ حرة، وليكن $\varepsilon : F \rightarrow M$ تشاكلا غامرا نواته $N$. كما نعلم فإن بعض الاختيارات للأساسات في $F$ و $N$ تعين تفريقات $M$ كمجموع مباشر لحلقيات جزئية دوروية. إن برهان (٨-٥) سينجز بواسطة إثبات العكس، أي أن بعض التفريقات المباشرة لـ $M$ تعين أساسات في $F$ و $N$ من النمط المناقش في (٧-١). إن المأخوذة التالية سوف تكون مفيدة.

**(٨-٧) مأخوذة**

*لتكن $M$ حلقية على $R$. ليكن $x$ و $y$ عنصرين في $M$ وافرض أن $x$ من المرتبة $d \neq 0$. علاوة على ذلك، افرض أن $Rx \supseteq Ry$ وأن $dy = 0$. عندئذ، $Rx = Ry$.*

**البرهـــــان**

بالاستناد إلى الفرض، فإنه يوجد $r \in R$ بحيث $x = ry$. ليكن $h$ عاملا مشتركا أعلى لـ $r$ و $d$. عندئذ، يوجد $r_1, d_1 \in R$ بحيث $r = r_1h$ و $d = d_1h$. عندئذ، إن $x = ry = r_1hy$ وبالتالي فإن $d_1x = r_1d_1hy = r_1dy = 0$. إذن، بما أن $x$ من المرتبة $d$ فإن $d|d_1$. إذن $d \sim d_1$ وإن $h$ عنصر وحدة. إذن $(r, d) = [1]$ وبالتالي فإنه يوجد $u, v \in R$ بحيث $ur + vd = 1$. إذن $y = (ur + vd)y = ux \in Rx$ كما هو مطلوب.

**(٨-٨) مأخوذة**

*ليكن $M = Mx_1 \oplus ... \oplus Rx_t$ مجموعا مباشرا لحلقيات جزئية $Rx_i$ التي هي حلقيات فتل دوروية وغير تافهة من المرتبة $d_i \neq 0$، وحيث $d_1 | \cdots | d_t$. ليكن $\varepsilon : F \rightarrow M$ تشاكلا غامرا حيث $F$ حرة وذات رتبة منتهية $s$. عندئذ، يوجد أساس $\{f_1, ..., f_s\}$ لـ $F$ وعناصر $y_i \in Rx_i$ بحيث*

(i) $M = Ry_1 \oplus \ldots \oplus Ry_t$ و $y_i$ من المرتبة $d_i$،

(ii) $\varepsilon(f_i) = y_i$ لكل $1 \le i \le t$ و $\varepsilon(f_i) = 0$ لكل $t < i \le s$ .

## البرهـــــان

لاحظ أننا قد كتبنا الحلقيات الجزئية الدوروية بترتيب معاكس للترتيب المعتاد؛ إن هـذا سيبسط الترميز . ونستخـدم الاستـقـراء الريـاضي عـلى $t$ . إذا كـان $t = 0$ فإن $M = \{0\}$ وإن $\varepsilon$ هو التطبيق الصفري ، وإن أي أساس لـ $F$ يحقق الشروط .

الآن ، نفرض أن $t > 0$ ، وأن المبرهنة صحيحة للمجاميع المباشرة التي يقل عدد مجمعاتها عن $t$ . الآن ، بما أن $\varepsilon$ غامر ، فإنه يوجد $g_1 \in F$ بحيث $\varepsilon(g_1) = x_1$ ؛ وبما أن $x_1 \neq 0$ ، فإن $g_1 \neq 0$ . إن $Rg_1$ حلقية جزئية من $F$ ، وبتطبيق (٧-١) على $Rg_1$ ، نجد أنه يوجد أساس $\{f'_1, \ \ldots, \ f'_s\}$ لـ $F$ وعنصر أساس $g'_1$ لـ $Rg_1$ و $r \in R$ بحيث $g'_1 = rf'_1$ . عندئذ ، يوجد عنصر وحدة $u''$ بحيث $g_1 = ug'_1$ ، وبالتالي فإن $g_1 = urf'_1$ . ليكن $y_1 = \varepsilon(f'_1)$ . عـنـدئـذ ، $x_1 = \varepsilon(g_1) = \varepsilon(urf'_1) = ury_1$ وبـالـتـالـي فـإن $x_1 \in Ry_1$ . الآن ، إن $d_1 y_1 = 0$ وذلك لأن $d_i$ هي مرتبة $x_i$ و $d_i$ تقسم $d_1$ وبالتالي فإن $d_1 x_i = 0$ لكل $i$ وإن $d_1 M = \{0\}$ . الآن ، بالإستنـاد إلـى (٨-٧) ، نجد أن $Rx_1 = Ry_1$ . بما أن أي مولدين لحلقية دوروية يكون لهما نفس المرتبة فإن $y_1$ يجب أن يكون من المرتبة $d_1$ . علاوة على ذلك ، إن

$$M = Ry_1 \oplus M_1 \qquad (3)$$

حيث

$$M_1 = Rx_2 \oplus \ldots \oplus Rx_t$$

ليكـن $\pi$ هو الإسقـاط من $M$ على $M_1$ والمصـاحب للتفـريق (3) . إذن ، إذا كـان $m = ry_1 + m_1$ حـيـث $m_1 \in M_1$ و $r \in R$ فـإن $\pi(m) = m_1$ . لـيـكـن $F_1 = Rf'_2 \oplus \cdots \oplus Rf'_s$ . عندئذ ، إن $F = Rf'_1 \oplus F_1$ . الآن ، بما أن $\pi : M \to M_1$ و $\varepsilon : F \to M$ تشـاكـلان غـامـران فـإن $\pi\varepsilon$ تشـاكـل غـامـر مـن $F$ إلـى $M_1$ . إذا كـان $f = xf'_1 + f^* \in F$ حـيـث $f^* \in F_1$ و $x \in R$ فـإن $\pi\varepsilon(f) = \pi\varepsilon(f^*)$ وذلـك لأن

$\pi\varepsilon(f_1') = \pi(y_1) = 0$ . إذن، إن اقتصار $\pi\varepsilon$ على $F_1$ هو تشاكل غامر . الآن، بالاستناد إلى فرضية الاستقراء نجد أنه يوجد أساس $\{f_2^*, \ \dots, \ f_s^*\}$ لـ $F_1$ وعناصر $y_i \in Rx_i$ من المرتبة $d_i$ لكل $2 \le i \le t$ بحيث $\pi\varepsilon(f_i^*) = y_i$ لكل $2 \le i \le t$ و $\pi\varepsilon(f_i^*) = 0$ لكل $t < i \le s$. إن هذا يعني أن

$$\varepsilon(f_i^*) = y_i + r_i \ y_1(2 \le i \le t) \quad \text{و} \quad \varepsilon(f_i^*) = r_i \ y_1(t < i \le s)$$

لعناصر مناسبة $r_i \in R$. ليكن :

$$f_1 = f_1' \quad \text{و} \quad f_i = f_i^* - r_i f_1'(i \ne 1)$$

الآن، من المؤكد أن $\{f_1', f_2^*, \dots, f_s^*\}$ أساس لـ $F$ وبالتالي فإن $\{f_1, \dots, f_s\}$ أساس لـ $F$ لأن محدد المصفوفة التي تربط هاتين المجموعتين يساوي 1 . علاوة على ذلك، إن $\varepsilon(f_1) = \varepsilon(f_1') = y_1$ و $\varepsilon(f_i) = \varepsilon(f_i^* - r_i f_1') = y_i + r_i y_1 - r_i y_1 = y_i$ لكل $2 \le i \le t$ و $\varepsilon(f_i) = 0$ لكل $t < i \le s$ . وهذا ينهي البرهان .

**(٨-٩) نتيجة**

*نستخدم الترميز المستعمل في (٨-٨)، وعلاوة على ذلك نفرض أن $M$ حلقية فتل وأن $s > 0$ . ليكن $N = \ker\varepsilon$ . عندئذ، يوجد أساس لـ $N$ بحيث تكون مصفوفته بالنسبة إلى أساس لـ $F$ هي $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, d_t, \dots, d_1)$ حيث عدد الآحاد هو $s - t$ .*

**البرهـــــان**

سنثبت أن

$$N = R(d_1 f_1) \oplus \dots \oplus R(d_t f_t) \oplus Rf_{t+1} \oplus \dots \oplus Rf_s \qquad (4)$$

في الحقيقة، بما أن $\{f_1, \dots, f_s\}$ أساس لـ $F$، فإنه إذا كان $f \in N$ فإن $f = \sum_{i=1}^{s} r_i \ f_i$

لعناصر مناسبة $r_i \in R$. عندئذ، إن :

$$0 = \varepsilon(f) = \sum_{i=1}^{s} r_i \, \varepsilon(f_i) = \sum_{i=1}^{t} r_i \, y_i$$

بما أن مجموع الحلقيات الجزئية $Ry_i$ مباشر فإن $r_i y_i = 0$ لكل $i$، وبالتالي فإن $d_i$، أي مرتبة $y_i$، تقسم $r_i$ لكل $1 \le i \le t$ . بالعكس، واضح أن هذا الشرط يضمن لنا أن $f \in N$، وبالتالي فإننا نحصل على (4). بما أن $M$ حلقية فتل، فإن كل $d_i$ تختلف عن الصفر وبالتالي فإن $\{d_1 f_1, ..., d_t f_t, f_{t+1}, ..., fs\}$ أساس لـ $N$. إذا كتبنا هذا الأساس بالترتيب المعاكس، فإن مصفوفته بالنسبة إلى $\{f_s, ..., f_1\}$ تكون هي المصفوفة القطرية المطلوبة.

**إثبات المبرهنة (٨-٥)**

سيكون الإثبات مباشرا - إلى حد ما - لأننا قد أنجزنا معظمه. إن

$$M = M_1 \oplus ... \oplus M_s = M'_1 \oplus ... \oplus M'_t \qquad (5)$$

حيث $M_i$ و $M'_j$ حلقيات دوروية غير تافهة من المراتب $d_i$ و $d'_j$ على الترتيب وحيث $d_1 | d_2 | \cdots | d_s$ و $d'_1 | d'_2 | \cdots | d'_t$ .

لاحظ أن الحلقيات قد رقمت الآن حسب الترتيب المعتاد. ليكن $u + 1$ هو أول عدد صحيح $i$ بحيث $d_i = 0$؛ وبالمثل، لتكن $v$ معرفة بواسطة التفريق الثاني، عندئذ، بالاستناد إلى المناقشة الموجودة في (٨-٣) نجد أن

$$T = M_1 \oplus ... \oplus M_u = M'_1 \oplus ... \oplus M'_v \qquad (6)$$

هي حلقية الفتل الجزئية في $M$، وأن $M/T \cong M_{u+1} \oplus ... \oplus M_s$ حرة ورتبتها $s - u$؛ بالمثل، إن $M/T$ حرة ورتبتها $t - v$. إذن، بالاستناد إلى (٧-٢) والتي تفيد أن رتبة الحلقية الحرة هي لامتغير، فإننا نحصل على

$$s - u = t - v \qquad (7)$$

ومن غير أن نفقد العمومية، فإنه يمكننا أن نفرض أن $u \ge v$. الآن، إذا كان $u = 0$ فإن (6) تؤدي إلى $v = 0$ كما أن (7) تؤدي إلى $s = t$؛ وعندئذ، بما أن جميع العناصر $d_i$ و $d'_j$ تصير صفرا فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة. إذن، يمكننا أن نفرض أن $u \neq 0$.

بالإستناد إلى (٦-١٠)، فإنه يوجد تشاكل غامر ε من حلقية حرة $F$ رتبتها $u$ إلى $T$؛ وبتطبيق (٨-٩)، على التوالي، على التفريقين الأول والثاني لـ$T$، فإن كلا من المصفوفتين $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_u)$ و $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d_1', \ldots, d_v')$ (حيث عدد الآحاد $u - v$) مصفوفة أساس لـ$N = \ker\varepsilon$ بالنسبة إلى أساس لـ$F$. بالاستناد إلى المناقشات الموجودة في البند الثاني من الفصل السابع فإن هاتين المصفوفتين متكافئتان. إذن، بالاستناد إلى (٧-١٧)، فإن $d_i \sim 1$ لكل $i = 1, \ldots, u - v$. بما أننا قد فرضنا أن كل $d_i$ ليس عنصر وحدة فإن $u = v$؛ علاوة على ذلك، بالاستناد إلى (٧-١٧)، فإن $d_i \sim d_i'$ لكل $i = 1, \ldots, u$. الآن، إن المعادلة (7) تؤدي إلى $s = t$، وبما أن العناصر المتبقية $d_j', d_i$ جميعها تساوي الصفر فإن هذا ينهي البرهان.

في الفصل التالي سوف نعالج المبرهنتين (٨-٢) و (٨-٥) من منظور مختلف وربما يكون المنظور الجديد أفضل من المنظور السابق.

## ٣ - التفريق الأوَّلي لحلقية

في ضوء (٨-٢)، من الطبيعي أن يسأل فيما إذا كان يمكن تفريق المجمعات $M_i$ التي حصلنا عليها هناك إلى حلقيات «أصغر» أم لا. الآن، سنبين أن هذا ممكن في بعض الأحيان. لقد رأينا في السابق أن $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ كحلقات (إذن كزمر إبدالية وكحلقيات على $\mathbb{Z}$)، وإن التفريق الذي سنعطيه الآن سيتبع الطريق المقترح بواسطة هذا المثال.

### (٨-١٠) مأخوذة

*لتكن $M$ حلقية غير تافهة على $R$، وافرض أن $dM = 0$ حيث $d \in R$ ليس صفرا وليس عنصر وحدة. ليكن $d = up_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ حيث $u$ عنصر وحدة والعناصر $p_i$ أولية وغير متشاركة زوجا زوجا في $R$. عندئذ، يمكن التعبير عن $M$ كمجموع مباشر $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ حيث $p_i^{\alpha_i} M_i = \{0\}$. إن هذه الشروط تعين الحلقيات الجزئية $M_i$ بشكل وحيد.*

**البرهــــان**

لاحظ أنه بما أن $R$ حلقة تحليل وحيد، فإنه من المؤكد أنه يمكن التعبير عن $d$ كما في النص أعلاه؛ نأخذ عبارة لـ $d$ من الشكل

$$d = (\text{عنصر وحدة}) \times (\text{حاصل ضرب عناصر أولية})$$

ثم نقوم بتجميع جميع العناصر الأولية المتشاركة مع واحد معطى ونحضر عناصر الوحدة إلى المقدمة. ضع:

$$d_i = d/p_i^{\alpha_i} = u\prod_{j\neq i} p_j^{\alpha_j}$$

أولا، سنثبت أنه إذا كان يوجد تفريق

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k \text{ بحيث } p_i^{\alpha_i} M_i = \{0\} \qquad (8)$$

فإن $M_i = d_i M$، وبالتالي فإنه يتم تعيين المركبات $M_i$ بشكل وحيد بأقوى معنى ممكن.

الآن، بمـــا أن $d_i M_j = 0$ حـــيـــث $j \neq i$ (وذلـــك لأن $p_j^{\alpha_j} \mid d_i$) فـــإن $d_i M \subseteq d_i M_1 + \cdots + d_i M_k = d_i M_i \subseteq M_i$. مـن الـنـاحـيـة الأخـرى، بمـا أن $\left(d_i, \ p_i^{\alpha_i}\right) = [1]$ فإنه يوجد $r, s \in R$ بحيث $rd_i + sp_i^{\alpha_i} = 1$. إذن، إذا كان $m \in M_i$ فإن:

$$m = \left(rd_i + sp_i^{\alpha_i}\right)m = d_i(rm) \in d_i M \text{ ، إذن } M_i \subseteq d_i M \subseteq d_i M_i \subseteq M_i$$

وبالتالي فإننا نحصل على المساواة في العلاقة الأخيرة.

إذن، لكي نثبت أنه يوجد تفريق، فإنه يجب علينا أن نأخذ $M_i = d_i M$ وأن نبرهن أن (8) متحققة. بما أن $d_i\, p_i^{\alpha_i} = d$ فواضح أن $p_i^{\alpha_i} M_i = \{0\}$. الآن، بما أن العامل المشترك الأعلى لـ $\{d_1, \ldots, d_k\}$ هو [1] فإنه يوجد $r_1, \ldots, r_k \in R$ بحيث $\Sigma r_i d_i = 1$. إذن، إذا كان $x \in M$ فإن $x = 1x = \Sigma d_i(r_i x) \in \Sigma d_i M = \Sigma M_i$. ولكي نرى أن هذا المجموع مباشر، نلاحظ أن أي عنصر $y \in \sum_{j\neq i} M_j$ يحقق العلاقة $d_i y = 0$؛ لأنه، كما أشرنا أعلاه، إذا كان $j \neq i$ فإن $d_i M_j = 0$. وإذا كان $y$ ينتمي أيضا

إلى $M_i$ ، فإن $p_i^{\alpha_i} y = 0$ . وإذا اخترنا $s, r$ - كما في الفقرة الأخيرة - فإن $y = \left(rd_i + sp_i^{\alpha_i}\right)y = 0$ . إن هذا ينهي البرهان .

**(٨-١١) نتيجة**

*إذا كانت $M = Rm$ دوروية ، فإن $M_i = R(d_i m)$ دوروية . في هذه الحالة ، إذا كانت $d$ مرتبة $M$ بالضبط فإن $p_i^{\alpha_i}$ هي مرتبة $M_i$ .*

**(٨-١٢) تعاريف**

*تسمى الحلقيات $M_i$ المذكورة في (٨-١٠) المركبات الأولية (primary components) لـ $M$ . إذا كانت $N$ حلقية بحيث $P^{\alpha}N = \{0\}$ (حيث $p$ عنصر أولي) فإننا نسمي $N$ حلقية أولية (primary module) أو حلقية فتل من النوع p (p-torsion module) . تسمى كل حلقية فتل دوروية من النوع $p$ حلقية دوروية أوَّلية أوحلقية دوروية مرتبتها قوة عنصر أولي أو حلقية دوروية مرتبتها قوة لـ $p$ .*

نستطيع أن نستخدم المأخوذة (٨-١٠) للحصول على تهذيب لمبرهنة التفريق (٨-٢) ، ولكن قبل أن نفعل ذلك ، سنعطي نص «المأخوذة الجامعة» التاليةوبرهانها وهي تتعلق بالمجاميع المباشرة للحلقيات الدوروية التي مراتبها أولية نسبيا .

**(٨-١٣) مأخوذة**

*ليكن $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ حيث $M_i$ حلقية فتل دوروية من المرتبة $r_i$ و $(r_i, r_j) = [1]$ حيث $i \neq j$ . عندئذ ، $M$ دوروية من المرتبة $r_1 \ldots r_k$ .*

**البرهــــان**

ليكن $M_i = Rm_i$ و $m = m_1 + \ldots + m_k$ . ليكن $d = r_1 \ldots r_k$ . الآن ، لكل $s \in R$ فإن $sm = 0 \Leftrightarrow sm_i = 0$ لكل $i \Leftrightarrow r_i | s$ لكل $i$ . بما أن العناصر $r_i$ أولية فيما بينها زوجا زوجا ، فإن هذا يعني أن $d$ يجب أن يقسم $s$ ، وبالتالي نجد أن $m$ من المرتبة $d$ . إذا

وضعنا $d_i = d/r_i$ فمن الواضح أن $d_i m = d_i m_i$. وبما أن $(r_i, d_i) = [1]$ فإنه يوجد $t, u \in R$ بحيث $tr_i + ud_i = 1$، وبالتالي فإن

$$m_i = (tr_i + ud_i)m_i = ud_i m_i \in R(d_i m_i) = R(d_i m) \subseteq Rm$$

إذن $Rm$ تحتوي على جميع العناصر $m_i$، وبالتالي يجب أن تساوي $M$.

**مثـــال**

لتكن $M$ هي الحلقية $\mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6$ على $\mathbb{Z}$. عندئذ، بالاستناد إلى (٨-١٠) و(٨-١١) وبقدر من الإفراط في الترميز، نجد أن

$$\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{20} = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_4$$

وبالتالي فإن

$$M = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4) \oplus (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9) \oplus \mathbb{Z}_5$$

لقد وضعنا بين قوسين مركبات الفتل لـ $M$ التي من النوع 2 والتي من النوع 3 والتي من النوع 5، وبالتالي فإننا قد عبرنا عن $M$ كمجموع مباشر لمركباتها الأولية. وللحصول على تفريق لـ $M$ كما هو موصوف في (٨-٢)، فإننا نختار من كل مركبة أولية حلقية جزئية دوروية، بحيث تكون مرتبتها أكبر ما يمكن، ثم نضع هذه الحلقيات الجزئية بين قوسين لنحصل على الحلقية الجزئية الدوروية $M_s$. الآن، نكرر هذه العملية على الحلقيات الجزئية المتبقية لنحصل على $M_{s-1}$، وهلم جرا، وفي كل مرحلة نتجاهل المركبات الأولية التي قد استنفدت. إذن،

$$M = \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3) \oplus (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5)$$

$$= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{180} \qquad \text{(بالاستناد إلى ٨-١٢)}$$

وبالتالي ينتج أن 180 ,12 ,2 هي متتالية من لامتغيرات الفتل لـ $M$.

**(٨-١٤) مبرهنة**

*لتكن $M$ حلقية مولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة $R$. عندئذ، يمكن التعبير عن $M$ كمجموع مباشر*

$$M = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_r \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_u$$

حيث كل $Z_i$ حلقية دوروية غير تافهة مرتبتها قوة عنصر أولي ، وكل $F_i$ حلقية دوروية غير تافهة وعديمة الفتل .

إذا كان $M = Z_1' \oplus \cdots \oplus Z_s' \oplus F_1' \oplus \cdots \oplus F_v'$ تفريقا مماثلا آخر فإن $r = s$ و $u = v$ ويمكن إعادة ترقيم المجمعات $Z_j'$ بحيث $\mathbf{o}(Z_i) = \mathbf{o}(Z_i')$ لكل $1 \leq i \leq r$ .

**البرهـــــان**

إن النص المتعلق بالوجود هو نتيجة مباشرة لـ (٨-٢) و (٨-١١) . إن (٨-٢) تفيد بأن $M$ مجموع مباشر لحلقيات دوروية ، وكل ما علينا أن نفعله هو أن نستخدم (٨-١١) للتعبير عن حلقيات الفتل (الموجودة بين هذه الحلقيات) كمجاميع مباشرة لحلقيات دوروية مراتبها قوى عناصر أولية .

الآن ، سنثبت صحة النص المتعلق بالوحدانية - أيضا ، لا يوجد شيء جديد هنا . باستخدام مناقشة مألوفة نجد أن :

$$T = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_r = Z_1' \oplus \cdots \oplus Z_s'$$

هي حلقية الفتل الجزئية في $M$ ، وأن $u = v$ ؛ لأن كلا منهما يساوي رتبة $M/T$ .

لتكن $\{p_1, \ldots, p_l\}$ مجموعة من العناصر الأولية وغير المتشاركة زوجا زوجا بحيث مرتبة كل $Z_i$ وكل $Z_j'$ هي قوة لعنصر ما $p_k$ . نعيد ترقيم الحلقيات $Z_i$ بحيث تكون مرتبة كل من $Z_1, \cdots, Z_{i_1}$ هي قوة للعنصر $p_1$ ، ومرتبة كل من $Z_{i_1+1}, \cdots, Z_{i_2}$ هي قوة للعنصر $p_2$ ، وهلم جرا . وبالمثل نعيد ترقيم الحلقيات $Z_j'$ هكذا

$$Z_1', \ldots, Z_{j_1}', Z_{j_1+1}', \ldots, Z_{j_2}', \ldots$$

إذا قمنا بتجميع المجمعات الموجودة في التفريقين بهذه الطريقة فإننا نحصل على تفريقين أوليين لـ $T$ . بالاستناد إلى (٨-١٠) نجد أن

$$Z_{i_t+1} \oplus \cdots \oplus Z_{i_{t+1}} = Z_{j_t+1}' \oplus \cdots \oplus Z_{j_{t+1}}', \cdots \qquad (9)$$

وهي مركبة $T$ المصاحبة لـ $p_{t+1}$ حيث $0 \leq t < l$ . (لقد وضعنا $i_0 = j_0 = 0$ ) . بما أن مرتبة كل مجمع هي قوة لـ $p_t$ ، فإننا نستطيع أن نرتب المجمعات في كل تفريق بحيث تقسم

مرتبة كل مجمع مرتبة المجمع الذي يليه. عندئذ، بالاستناد إلى (٨-٥) نجد أن عدد المجمعات في الطرف الأيسر لـ (9) يساوي عددها في الطرف الأيمن، ونجد أنه إذا قابلنا الحلقيات بطريقة طبيعية، فإن مثاليات ترتيبها تكون متساوية. وهذا يعطي النتيجة المطلوبة.

سننهي هذا الفصل بإثبات أن التفريق المعطى في (٨-١٤) «ذري» أي أنه لا يمكن تهشيم المجمعات أكثر من ذلك.

**(٨-١٥) تعريف**

*إذا كانت $M$ حلقية على $R$، فإننا نقول إن $M$ غير قابلة للتفريق* (indecomposable) *إذا كانت $M \neq \{0\}$ وكان لا يوجد تفريق مباشر غير تافه لـ $M$؛ أي أنه إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$ مجموعا مباشرا لحلقيتين جزئيتين $M_1$ و $M_2$ فإن $M_1 = \{0\}$ أو $M_2 = \{0\}$.*

**(٨-١٦) مبرهنة**

*كل حلقية على $R$ دوروية وغير تافهة، ومرتبتها قوة عنصر أولي، فإنها غير قابلة للتفريق. كذلك، كل حلقية على $R$ دوروية وغير تافهة، وعديمة الفتل فإنها غير قابلة للتفريق.*

لكي نثبت المبرهنة (٨-١٦) فإننا نحتاج إلى المأخوذة التالية التي تتعلق ببنية الحلقيات الدوروية التي مرتبتها هي قوة عنصر أولي.

**(٨-١٧) مأخوذة**

*لتكن $Z = Rz$ حلقية دوروية على $R$ ومرتبتها $p^\alpha$ قوة عنصر أولي. عندئذ، فإن الحلقيات الجزئية في $Z$ تكون*

$$\{0\} = Z_\alpha \subset Z_{\alpha-1} \subset \ldots \subset Z_1 \subset Z_0 = Z$$

*فقط، حيث $Z_\beta = p^\beta Z$.*

## البرهـــان

بالاستناد إلى (٦-١١) فإن $Z \cong {}_R(R/p^\alpha R)$. في هذا التماثل، إن أية حلقية جزئية في $Z$ تقابل (بالاستناد إلى (٥-١٣)) حلقية جزئية في ${}_RR$ محتوية على $p^\alpha R$. إن حلقية من هذا النمط هي مثالي في $R$، وبالتالي فهي من الشكل $r\,R$ حيث $r|p^\alpha$؛ لأن $rR \supseteq p^\alpha R$. إذن، بالاستناد إلى مبرهنة التحليل الوحيد، فإن $r = up^\beta$ حيث $0 \le \beta \le \alpha$ و $u$ عنصر وحدة ونستطيع أن نختار $r$ بشكل مناسب بحيث نجعل $u$ تساوي 1. إن هذا يثبت أن الحلقيات الجزئية في $Z$ هي الحلقيات $Z_\beta$ فقط. بما أن مرتبة $Z_\beta$ هي $p^{\alpha-\beta}$ بالضبط عندما $0 \le \beta \le \alpha$، فإن الحلقيات الجزئية الموجودة في القائمة تكون جميعها مختلفة.

### إثبات المبرهنة (٨-١٦)

(i) لتكن $Z$ دوروية ومرتبتها $p^\alpha$ قوة عنصر أولي حيث $\alpha > 0$، وافرض أن $Z = Z' \oplus Z''$. إذا كان كل من $Z'$ و $Z''$ مختلفا عن الصفر فإن فحص قائمة الحلقيات الجزئية في $Z$، المعطاة أعلاه، يبين أن كلا من $Z'$ و $Z''$ تحتوي على الحلقية الجزئية غير الصفرية $Z_{\alpha-1}$، وبالتالي فإن تقاطعهما غير تافه. إذن $Z' = \{0\}$ أو $Z'' = \{0\}$.

(ii) كل حلقية على $R$ دوروية وغير تافهة وعديمة الفتل، فإنها تماثل ${}_RR$، لذلك فإنه يكفي أن نثبت أن ${}_RR$ غير قابلة للتفريق. إذا كان ${}_RR = R_1 \oplus R_2$ حيث كل $R_i$ حلقية جزئية غير صفرية في $R$، فإننا نختار $0 \ne r_i \in R_i$ حيث $i = 1, 2$ ونجد أن $r_1r_2 \in RR_2 \subseteq R_2$ و $r_1r_2 = r_2r_1 \in RR_1 \subseteq R_1$. بما أن $R$ لا تحتوي على قواسم للصفر، فإن $r_1r_2$ عنصر غير تافه في $R_1 \cap R_2$، وهذا تناقض. إذن ${}_RR$ غير قابلة للتفريق.

## تمارين على الفصل الثامن

١ - إذا اعتبرنا $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{108}$ حلقية على $\mathbb{Z}$ فقم بتفريقها إلى
(i) مركباتها الأولية،
(ii) مركباتها غير القابلة للتفريق.
حاول أن تحل بعض الأمثلة المشابهة.

٢ - أوجد الرتبة الحرة من الفتل ومتتالية من لامتغيرات الفتل لكل حلقية من الحلقيات التالية:
(i) $V$ فضاء متجه على حقل $K$ وبعده يساوي $n$، معتبرا $V$ حلقية على $K$.
(ii) نفس الفضاء ولكن نعتبره حلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$، حيث $\alpha$ معرف على أساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ لـ $V$ كما يلي:
$\alpha v_i = v_{i+1}$ لكل $1 \leq i \leq n-1$ و $\alpha v_n = 0$
(iii) $\mathbb{Z}_p$ حيث نعتبر $\mathbb{Z}_p$ حلقية على $\mathbb{Z}_p$.
(iv) $\mathbb{Z}_p$ حيث نعتبر $\mathbb{Z}_p$ حلقية على $\mathbb{Z}$.

٣ - لتكن $M$ حلقية فتل دوروية على حلقة تامة رئيسة. صف الحلقيات الجزئية في $M$ وأثبت أن عددها عدد منته. أثبت أن كل حلقية قسمة لـ $M$ تماثل حلقية جزئية في $M$.

٤ - استخدم المبرهنتين (٨-٢) و (٨-٥) لتثبت أن $_RR$ غير قابلة للتفريق.

٥ - لتكن $N, M, L$ حلقيات على حلقة تامة رئيسة بحيث تكون مولدة نهائيا، وتكون حلقيات فتل من النوع $p$، اعتبر لامتغيرات الفتل لتثبت أنه إذا كان $L \oplus N \cong M \oplus N$ فإن $L \cong M$. مدد إلى الحالة التي تكون فيها $N, M, L$ حلقيات اختيارية مولدة نهائيا. (**إرشاد**: ابدأ بالتمديد إلى الحالة التي تكون فيها كل من $L$ و $M$ اختيارية بينما تكون $N$ حلقية فتل من النوع $p$).

*٦ - أثبت أنه إذا كان لدينا حلقية مولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة، فإن كل حلقية جزئية منها تكون مولدة نهائيا.

٧ - ليكن $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_t$ مجموعا مباشرا لحلقيات جزئية دوروية غير تافهة مراتبها $p^{n_1}, \ldots, p^{n_t}$ حيث $p$ عنصر أولي و $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_t$. لتكن

$M(p) = \{m \in M : pm = 0\}$ . أثبت أن $M(p)$ حلقية جزئية في $M$، وأنه يمكن اعتبارها فضاء متجها بعده $t$ على الحقل $R/pR$. لنفرض أن $M = M_1' \oplus \cdots \oplus M_s'$ تفريق آخر لـ $M$ حيث $M_j'$ دوروية ومرتبتها هي $p^{n_j'}$ وحيث $n_1' \leq \ldots \leq n_s'$ . أثبت أن $s = t$ . استخدم التفريقات المباشرة لـ $M/M(p)$ والاستقراء الرياضي لتثبت أن $n_1 = n_1', \ \ldots, \ n_t = n_t'$ . إن هذا يعطينا برهانا ثانيا لـ (٨-٥) لحلقيات الفتل من النوع $p$. مدد إلى الحالة العامة.

٨ - لتكن $M$ حلقية فتل مولدة نهائيا ولتكن متتالية العوامل اللامتغيرة لها هي $d_1, \ldots, d_s$. باستخدام (٨-٨) أو أية طريقة أخرى، أثبت أنه لا يمكن توليد $M$ بمجموعة عدد عناصرها أقل من $s$.

*ضمن الإطار المنطقي لهذا الكتاب فإن الفصل الثامن يستند إلى الفصل السابع، ولكن المجموعة التالية من التمارين تبين أن المبرهنات الرئيسة في الفصل السابع قابلة للاستنتاج من نتائج الفصل الثامن.*

٩* - بالاستناد إلى مبرهنة الانشطار (٧-٧)، أثبت أن الفرض في (٨-٨) بأن $M$ حلقية فتل، هو فرض غير ضروري.

١٠ - باستخدام التمرين السابق استنتج المبرهنة (٧-١) من المبرهنة (٨-٢).

١١* - لتكن $N$ حلقية حرة على $R$، ونفرض أن لها الرتبة المنتهية $t$. نفرض أن $\{n_1, \ldots, n_l\}$ مجموعة جزئية من $N$ بحيث تولد $N$ (لا نفرض أنها تولد $N$ بحرية). استخدم مبرهنة الانشطار (٧-٧) لتثبت أن $l \geq t$. أثبت أنه توجد مصفوفة $X = (x_{ij})$ قابلة للانعكاس ومن النوع $l \times l$ بحيث

$$\sum_{j=1}^{l} x_{ji}\, n_j = n_i^* \qquad (i = 1, \ \ldots, \ t)$$

و

$$\sum_{j=1}^{l} x_{ji}\, n_j = 0 \qquad (i = t+1, \ \ldots, \ l)$$

حيث $\{n_1^*, \ \ldots, \ n_t^*\}$ أساس لـ $N$.

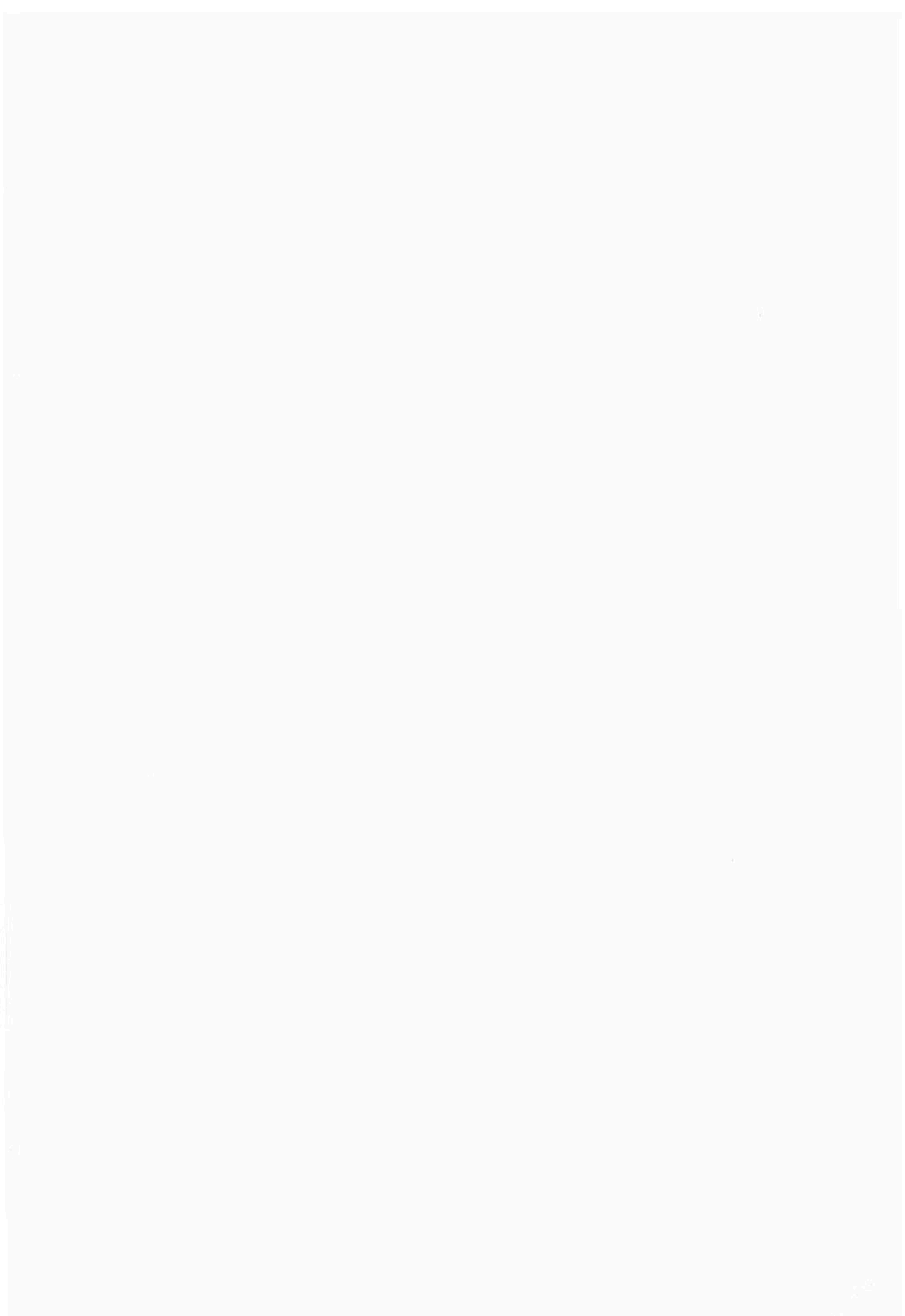
استنتج أنه إذا كانت $A$ مصفوفة من النوع $s \times t$ على $R$، فإنه توجد مصفوفة $T$ قابلة للانعكاس ومن النوع $t \times t$ على $R$ بحيث $AT = (B|0)$ حيث أعمدة $B$ مستقلة خطيا.

الآن، أثبت أن (٧-١٠) تنتج من (٧-١).

١٢ - لتكن $N$ حلقية حرة على $R$، ولتكن $\boldsymbol{n} = \{n_1, ..., n_l\}$ مجموعة مولدة لـ $N$ (لا نفرض أنها تولد $N$ بحرية). لتكن $X = (x_{ij})$ مصفوفة قابلة للانعكاس ومن النوع $l \times l$ على $R$. أثبت أنه إذا كان

$$n_i^* = \sum_{i=1}^{l} x_{ji}\, n_j \qquad (i = 1, ..., l)$$

فإن $\left\{n_1^*, ..., n_l^*\right\}$ تولد $N$. استنتج أن (٧-١٥) تنتج من (٨-٥).



# الفصل التاسع

## مبرهنات التفريق
## (مقاربة لاتعتمد على المصفوفات)

في هذا الفصل، سوف نثبت المبرهنات الأساسية (٨-٢)، (٨-٥) و (٨-١٤) مباشرة باستخدام الحلقيات نفسها وبدون الاعتماد على الحلقيات الحرة والمصفوفات. إن المعلومات الحسابية التي تعطيها هذه المقاربة (approach) أقل من تلك المعطاة بالمقاربة السابقة، ولكن يمكن القول إن المقاربة الجديدة أروع من المقاربة السابقة. بما أننا لا نثبت أية نتائج جديدة في هذا الفصل، فإن القارئ المتطلع إلى التعرف على تطبيقات النظرية في الجزء الثالث، يستطيع أن يحذف هذا الفصل عندما يدرس المادة لأول مرة. سوف نحتاج إلى بعض النتائج من الفصلين السابع والثامن، ولكن القارئ يستطيع دراسة هذه النتائج بمعزل عن معظم المادة الموجودة في هذين الفصلين.

### ١ - وجود التفريقات

نبدأ بدراسة الحالة التي يكون لدينا فيها حلقية فتل من النوع $p$ مولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة $R$ (حيث $p$ عنصر أولي في $R$)، ونبرهن أن هذه الحلقية مجموع مباشر لحلقيات جزئية دوروية. إن شرط القسمة الموجود في المبرهنة (٨-٢) شرط فائض هنا؛ لأنه يمكن ترتيب أية مجموعة من قوى عنصر أولي معطى $p$ بحيث يقسم كل عنصر في المجموعة العنصر الذي يليه. ثم ندرس الحالة التي يكون لدينا فيها حلقية عديمة الفتل، ثم نستنتج الحالة العامة من هاتين الحالتين بقليل من الجهد.

**(٩-١) مأخوذة**

*ليكن $p$ عنصرا أوليا في $R$ وليكن $M = Rx_1 \oplus \ldots \oplus Rx_t$ مجموعا مباشرا للحلقيات الدوروية $Rx_i$ التي مراتبها هي $P^{\alpha_i}$ حيث $\alpha_1 \le \ldots \le \alpha_t$ . ليكن $m \in M$ وليكن $\gamma$ عددا صحيحا بحيث $0 \le \gamma \le \alpha_1$، وافرض أن $p^{\alpha_1 - \gamma} m = 0$ . عندئذ، يوجد $n \in M$ بحيث $m = p^{\gamma} n$ .*

**البرهـــــان**

بما أن $m = \Sigma r_i x_i$، حيث $r_i \in R$، فإن $0 = p^{\alpha_1 - \gamma} m = \Sigma p^{\alpha_1 - \gamma} r_i x_i$ إذن $p^{\alpha_1 - \gamma} r_i x_i = 0$ لكل $i$، وبالتالي فإن $p^{\alpha_i} \mid p^{\alpha_1 - \gamma} r_i$ . ومن باب أولى فإن $p^{\alpha_1} \mid p^{\alpha_1 - \gamma} r_i$ . بالاستناد إلى مبرهنة التحليل الوحيد فإننا نجد أنه إذا حللنا $r_i$ إلى عناصر أولية، فإن عدد العوامل المتشاركة مع $p$ والظاهرة في التحليل، يجب أن لا يقل عن $\gamma$، وبالتالي فإن $p^{\gamma} \mid r_i$ . ليكن $r_i = p^{\gamma} s_i$ . عندئذ، إن $m = p^{\gamma}(\Sigma s_i x_i)$ كما هو مطلوب.

**(٩-٢) مأخوذة**

*إذا كانت $M$ حلقية فتل من النوع $p$ ومولدة نهائيا، فإن $M$ مجموع مباشر لحلقيات جزئية دوروية.*

**البرهـــــان**

بدلا من إعطاء برهان لهذه المأخوذة، فإنه من المناسب أن نبرهن صحة النص التالي الذي هو أقوى من المأخوذة:

لتكن $M$ حلقية فتل من النوع $p$ مولدة بالعناصر $m_1, \ldots, m_s$ حيث $s \ge 0$، مرتبة $m_i$ هي $p^{\alpha_i}$ و $\alpha_1 \le \ldots \le \alpha_s$ . عندئذ، توجد عناصر $n_1, \ldots, n_s \in M$ بحيث مرتبة $n_i$ هي $p^{\beta_i}$، $\beta_i \le \alpha_i$ و $M = Rn_1 \oplus \ldots \oplus Rn_s$ .

نستخدم الاستقراء الرياضي على $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i$ الذي يسمى ارتفاع المجموعة المولدة.

إذا كان $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i = 0$ ، فإن $M = \{0\}$؛ وبالتالي فإن النتيجة تافهة.

إذن، يمكننا أن نفرض أن $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i > 0$ وأن المبرهنة صحيحة للحلقيات التي لها مجموعة مولدة ارتفاعها أقل من $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i$ . ويمكننا أن نفرض أن $\alpha_1 > 0$ عن طريق حذف المجمعات التافهة. وبما أن المبرهنة صحيحة إذا كان $s = 0$ أو $s = 1$ فإنه يمكننا أن نفرض أن $s > 1$ . ليكن $M^* = \sum_{i=2}^{s} Rm_i$ . عندئذ، إن

$$M = Rm_1 + M^* \qquad (1)$$

بما أن $\alpha_1 > 0$ ، فإن ارتفاع المجموعة المعطاة المولدة لـ $M^*$ أقل من $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i$ .
إذن، بالاستناد إلى فرضية الاستقراء، فإنه يوجد $n_2, \ldots, n_s \in M^*$ بحيث $M^* = Rn_2 \oplus \ldots \oplus Rn_s$ ومرتبة $n_i$ هي $p^{\beta_i}$ و $\beta_i \leq \alpha_i$ . بالطبع، من الممكن أن تكون بعض العناصر $n_i$ تساوي الصفر. الآن، بالاستناد إلى (1) فإن $\{m_1, n_2, \ldots, n_s\}$ تولد $M$ وإن ارتفاعها هو $\alpha_1 + \sum_{i=2}^{s}\beta_i$ . إذا كان يوجد $i$ بحيث $\beta_i < \alpha_i$ ، فإن هذا أقل من $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i$ ، وبالتالي فإن فرضية الاستقراء تعطينا النتيجة المطلوبة.

إذن، يمكننا أن نفرض أن $\beta_i = \alpha_i$ لـ $i = 2,\ldots, s$ . الآن، إن العنصر $m_1 + M^* \in M/M^*$ يحقق $p^{\alpha_1}(m_1 + M^*) = M^*$ ، وبالتالي فإن مثالي الترتيب

له هو $rR$ حيث $r \mid p^{\alpha_1}$ . بما أن $p$ عنصر أولي ، فإن مرتبة $m + M^*$ هي $p^\gamma$ حيث $0 \le \gamma \le \alpha_1$ . وهذا يعني أن

$$xm_1 \in M^* \Leftrightarrow p^\gamma | x \qquad (2)$$

بوجه خاص، إن $p^\gamma m_1 = m^* \in M^*$ . الآن، إن $0 = p^{\alpha_1} m_1 = p^{\alpha_1 - \gamma} m^*$ .
بما أن $\beta_2 = \alpha_2 \ge \alpha_1$ فمن باب أولى إن $p^{\beta_2 - \gamma} m^* = 0$ . الآن، نطبق (٩-١) على $M^*$ . إذن، يوجد $\overline{m} \in M^*$ بحيث $m^* = p^\gamma \overline{m}$ . إذن، بوضع $n_1 = m_1 - \overline{m}$ نجد أن $p^\gamma n_1 = 0$ . الآن، ندعي أن

$$M = Rn_1 \oplus M^* \qquad (3)$$

عندئذ، إن هذا سيتمم البرهان؛ ذلك لأن $M^* = Rn_2 \oplus \ldots \oplus Rn_s$ ومرتبة $n_i$ هي $p^{\beta_i} = p^{\alpha_i}$ لكل $i = 2, \ldots, s$ ومرتبة $n_1$ تقسم $p^\gamma$ حيث $\gamma \le \alpha_1$ . (في الحقيقة، إن مرتبة $n_1$ هي بالضبط $p^\gamma$ ) . الآن، إن $Rn_1 + M^*$ تحتوي على $n_1 + \overline{m} = m_1$ وبالتالي، بالاستناد إلى (1) فإنها تساوي $M$ . من ناحية أخرى، افرض أن $yn_1 \in Rn_1 \cap M^*$ حيث $y \in R$ . عندئذ، إن $ym_1 = yn_1 + y\overline{m} \in M^*$ . إذن، بالاستناد إلى (2) فإن $p^\gamma | y$ . إذن $yn_1 = 0$ ، وبالتالي فإن $Rn_1 \cap M^* = \{0\}$ . إن هذا يثبت (3) ويتم البرهان .

الآن، سنناقش حالة الحلقيات عديمة الفتل .

**(٩-٣) مأخوذة**

*إذا كانت $M$ حلقية عديمة الفتل ومولدة نهائيا على $R$، فإنها حرة وذات رتبة منتهية .*

**البرهـــــان**

نفرض أن $\{m_1, \ldots, m_s\}$ تولد $M$ . إذا كان $s = 0$ فإن النتيجة واضحة، وبالتالي فإنه يمكننا أن نفرض أن $s > 0$ . أولا ، ندعي أنه لا توجد مجموعة جزئية مستقلة خطيا في $M$؛ بحيث يكون عدد عناصرها أكبر من $s$ . في الحقيقة، بالاستناد إلى (٦-١٠) فإنه يوجد تشاكل غامر $\varepsilon$ من حلقية حرة $E$ ، حيث رتبة $E$ هي $s$، إلى $M$ . إن أية مجموعة مكونة من $s + 1$ عنصرا من $M$ تكون من الشكل $\{\varepsilon(e_1), \ldots, \varepsilon(e_{s+1})\}$

حيث $e_i \in E$ . بالاستناد إلى برهان (٧-٢)، فإن $\{e_1, ..., e_{s+1}\}$ غير مستقلة خطيا، وبالتالي فإنه يوجد $x_i \in R$ بحيث $\sum_{i=1}^{s+1} x_i e_i = 0$ وبحيث بعض العناصر $x_i$ مختلف عن الصفر . إذن $\sum_{i=1}^{s+1} x_i \ \varepsilon(e_i) = 0$ ، وبالتالي فإن كل مجموعة مكونة من $s + 1$ عنصرا من عناصر $M$ تكون غير مستقلة خطيا . إذن، يمكننا أن نختار مجموعة مستقلة خطيا $\{f_1, ..., f_l\}$ في $M$ بحيث يكون $l$ أكبر ما يمكن . لتكن $F$ هي الحلقية الجزئية (في $M$) المولدة بهذه العناصر . بالاستناد إلى (٦-٨)، فإن $F$ حرة . الآن، إن المجموعة $\{f_1, ..., f_l, m_i\}$ غير مستقلة خطيا لكل $i$، وبالتالي يكون لدينا علاقة

$$\sum_{j=1}^{l} r_{ji} \ f_j + r_i m_i = 0$$

حيث يختلف بعض المعاملات (في هذه العلاقة) عن الصفر . بما أن $\{f_1, ..., f_l\}$ مستقلة خطيا، فإن ذلك يعني أن $r_i \neq 0$ وأن $r_i m_i \in F$ . ليكن $r = r_1 ... r_s$ . عندئذ، إن $r \neq 0$ و $r m_i \in F$ لكل $i$ . إذن $r m \in F$ لكل $m \in M$ . إن التطبيق $m \to rm$ هو تشاكل حلقيات داخلي لـ $M$ ويقرن $M$ بحلقية جزئية في $F$ . علاوة على ذلك، بما أن $M$ عديمة الفتل، فإن نواة هذا التشاكل الداخلي هي $\{0\}$ . إذن، $M$ متماثلة مع حلقية جزئية في $F$، وبالاستناد إلى (٧-٨)، فإن هذه الحلقية الجزئية حرة .

الآن، نحن جاهزون لنثبت المبرهنة (٨-٢)، ومن المفيد للقارئ أن يعيد قراءة نصها .

**إثبات المبرهنة (٨-٢)**

لتكن $T$ هي حلقية الفتل الجزئية في $M$. عندئذ، بالاستناد إلى (٦-١) و (٦-٥)، فإن $M/T$ حلقية عديمة الفتل مولدة نهائيا وبالتالي، بالاستناد إلى (٩-٣) فإنها حرة ورتبتها منتهية . إذن، بالاستناد إلى خاصة الانشطار للحلقيات الحرة (٧-٧) فإن

$$M = T \oplus F \qquad (4)$$

حيث $F$ حلقية جزئية حرة ورتبتها منتهية .

الآن، نعتبر $T$. إن $T \cong M/F$ وبالاستناد إلى (٦-١)، فإنها مولدة نهائيا. نفرض أن $\{x_1, ..., x_l\}$ تولد $T$. كل $x_i$ هو عنصر فتل، وبالتالي فإنه يوجد $0 \neq r_i \in R$ بحيث $r_i x_i = 0$. ليكن $r = r_1 ... r_l$. عندئذ، إن $r \neq 0$. إن كل عنصر في $T$ هو من الشكل $\Sigma s_i x_i$ حيث $s_i \in R$. عندئذ، إن $r(\Sigma s_i x_i) = \Sigma s_i r x_i = 0$ وبالتالي فإن $rT = \{0\}$. إذا كان $r$ عنصر وحدة، فإن $T = \{0\}$. وإذا لم يكن الأمر كذلك فإنه بالاستناد إلى مبرهنة التحليل الوحيد يكون

$$r = up_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$$

حيث $u$ عنصر وحدة وحيث $p_i$ عناصر أولية غير متشاركة زوجا زوجا في $R$. بالاستناد إلى (٨-١٠) فإن

$$T = T_1 \oplus ... \oplus T_k$$

حيث $T_i$ حلقية فتل من النوع $p$ ومولدة نهائيا. إذن، بالاستناد إلى المأخوذة (٩-٢) فإن

$$T_1 = T_{11} + ... + T_{1n},$$

$$T_2 = T_{21} + ... + T_{2n},$$

..............................

$$T_k = T_{k1} + ... + T_{kn}$$

حيث $T_{ij}$ حلقية دوروية مرتبتها $p_i^{\alpha_{ij}}$ وحيث

$$\alpha_{i1} \leq \alpha_{i2} \leq ... \leq \alpha_{in} \qquad (5)$$

من الممكن هنا، أن تكون بعض الحلقيات $T_{ij}$ هي الصفر - من المناسب إضافة بعض الحلقيات الصفرية إلى المقدمة إذا كان ذلك ضروريا، وذلك للحصول على نفس عدد المجمعات في كل $T_i$.

ليكن $M_j = T_{1j} \oplus ... \oplus T_{kj}$ مجموع الحلقيات الموجودة في العمود ذي الرقم $j$. عندئذ، بالاستناد إلى (٨-١٣)، فإن $M_j$ حلقية دوروية مرتبتها $d_j = p_1^{\alpha_{1j}} p_2^{\alpha_{2j}} \ ... \ p_k^{\alpha_{kj}}$. إذن، بالاستناد إلى (5) نجد أن $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$. بالإضافة إلى ذلك، إن $T = M_1 \oplus ... \oplus M_n$. الآن، إن الحلقية الجزئية الحرة $F$ هي

مجموع مباشر $M_{n+1} \oplus ... \oplus M_s$ لحلقيات دوروية عديمة الفتل، وغير تافهة، ومرتبة كل منها هي 0. إذن بالاستناد إلى (4) فإن:

$$M = M_1 \oplus ... \oplus M_s$$

وهذا هو بالضبط التفريق المطلوب في (٨-٢) حيث $d_{n+1} = ... = d_s = 0$.

لاحظ أننا قد أثبتنا أيضا نص الوجود الموجود في (٨-١٤)، وذلك لأن $M$ هي المجموع المباشر للحلقيات $T_{ij}$ التي هي دوروية ومراتبها قوى عناصر أولية، وللحلقيات $M_{n+1}, ..., M_s$ التي هي دوروية وعديمة الفتل.

## ٢ – الوحدانية – خاصة اختصار للحلقيات المولدة نهائيا

نود إثبات الخواص الأساسية للوحدانية، الموجودة في الفصل الثامن [(٨-٥) والجزء الثاني من (٨-١٤)]. إن جوهر هذه الخواص، أنه في كل واحد من نمطي التفريق، المجمعات وحيدة «تحت سقف التماثل». إن الحجة التي سنستخدمها، ستستعمل الاستقراء الرياضي على عدد المجمعات بالإضافة إلى «مأخوذة الاختصار»، التي تختزل المسألة جوهريا إلى مسألة إثبات أنه إذا كان يوجد تفريقان مباشران من النمط المعتبر، فإنه يوجد مجمع في التفريق الأول متماثل مع مجمع موجود في التفريق الثاني.

**(٩-٤) مأخوذة**

*لتكن $T_i$ لكل $i = 1, 2$ حلقية فتل مولدة نهائيا على حلقة تامة رئيسة $R$، ولتكن $T_1$ متماثلة مع $T_2$. لتكن $N_i$ لكل $i = 1, 2$ حلقية على $R$ وافرض أن:*

$$T_1 \oplus N_1 \cong T_2 \oplus N_2$$

*عندئذ، إن $N_1 \cong N_2$.*

بكلمات أخرى، إذا تحققت شروط مناسبة، فإننا نستطيع أن نختصر المجمعات المتماثلة في التفريقات المباشرة. إن برهان هذه النتيجة يعتمد على بعض الحقائق البسيطة الخاصة بالحلقيات الدوروية التي مرتبتها هي قوة لعنصر أولي.

**(٩-٥) مأخوذة**

*لتكن $Z$ حلقية دوروية على $R$. لتكن مرتبة $Z$ قوة عنصر أولي، وليكن كل من $\phi$ و $\psi$ تشاكلا داخليا لـ $Z$ بحيث $\phi + \psi = 1$، حيث $1$ هو التشاكل الداخلي المحايد لـ $Z$. عندئذ، إن $\phi$ أو $\psi$ تماثل ذاتي لـ $Z$.*

**البرهـــــان**

لتكن مرتبة $Z$ هي $p^{\alpha}$. واضح أنه يمكننا أن نفرض أن $Z \neq \{0\}$، وبالتالي فإن $\alpha > 0$. عندئذ، بالاستناد إلى (٨-١٧) فإنه توجد في $Z$ حلقية جزئية غير صفرية ووحيدة $Z_{\alpha-1} = p^{\alpha-1}Z$ وهي محتواة في كل حلقية جزئية غير صفرية من $Z$. إذن، إذا كانت كل من $\ker\phi$ و $\ker\psi$ غير صفرية، فإن كلا منهما تحتوي على $Z_{\alpha-1}$؛ عندئذ، فإن $\phi + \psi$ يقرن $Z_{\alpha-1}$ بالصفر. ولكن هذا مستحيل؛ لأن $\phi + \psi = 1$. إذن $\ker\phi = \{0\}$ أو $\ker\psi = \{0\}$.

إذا كان $\ker\phi = \{0\}$ فإن $\operatorname{im}\phi$ حلقية جزئية من $Z$ متماثلة مع $Z$ نفسها. مرة أخرى، بالاستناد إلى (٨-١٧) فإن حلقية جزئية من هذا النمط تكون على الشكل $p^{\beta}Z$ حيث $0 \leq \beta \leq \alpha$. واضح أن مرتبة هذه الحلقية الجزئية هي $p^{\alpha-\beta}$، وبالتالي بما أن الحلقيات الدوروية المتماثلة يكون لها نفس مثالي الترتيب، فإن $p^{\alpha-\beta} \sim p^{\alpha}$. إذن $\beta = 0$. وبالتالي فإن $\operatorname{im}\phi = Z$ وإن $\phi$ هو تماثل ذاتي.

أيضا، نحتاج إلى بعض الحقائق البسيطة حول التفريقات المباشرة. لتكن:

$$M = M_1 \oplus M_2 \tag{6}$$

حلقية مكتوبة كمجموع مباشر لحلقيتين جزئيتين $M_1$ و $M_2$. نذكر بأن الإسقاطات $\pi_i$ من $M$ إلى $M_i$، المصاحبة لهذا التفريق، معرفة بواسطة $\pi_i(m) = m_i$ حيث $m = m_1 + m_2$ و $m_i \in M_i$. بما أن هذه العبارات وحيدة، فإن $\pi_i$ حسن التعريف، ويستطيع القارئ بسهولة أن يرى أن $\pi_i$ تشاكل داخلي لـ $M$ وأن نواة هذا التشاكل هي $M_j$ حيث $j \neq i$. كذلك، يستطيع القارئ أن يتحقق بسهولة من:

(i) $\pi_1 + \pi_2 = 1$، حيث $1$ هو التشاكل الداخلي المحايد لـ $M$.

(ii) إذا كان $j \neq i$ فإن $\pi_i \pi_j = 0$ (حيث $0$ هو التشاكل الداخلي لـ $M$ الذي يقرن كل عنصر بالصفر).

(iii) $\pi_i^2 = \pi_i$ لكل $i = 1, 2$ .

**(٩-٦) مأخوذة**

*إذاكانت $M$ كما في (6) وكانت $N$ حلقية جزئية من $M$ بحيث تحتوي على $M_1$ فإن $N = M_1 \oplus (N \cap M_2)$ .*

**البرهـــــان**

ليكن $n \in N$ . عندئذ، نستطيع أن نكتب $n = m_1 + m_2$ حيث $m_i \in M_i$ وبما أن $M_1 \subseteq N$ ، فـــإن $m_2 = n - m_1 \in N$ . إذن، إن $n \in M_1 + (N \cap M_2)$ . بمـــا أن المجمعين محتويان في $N$، وبما أن تقاطعهما هو $\{0\}$ ، فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة .

الآن، نحن مستعدون لبرهان المأخوذة (٩-٤) .

**برهان المأخوذة (٩-٤)**

نلاحظ أولا أنه يكفي أن نعتبر الحالة التي تكون فيها كل من $T_1$ و $T_2$ حلقية دوروية مرتبتها قوة عنصر أولي . ذلك لأنه في الحالة العامة نستند إلى نص الوجود في (٨-١٤) لنجد أن : $T_1 = Z_{11} \oplus \ldots \oplus Z_{1t}$ مجموع مباشر لحلقيات دوروية مرتبة كل منها قوة عنصر أولي . إذا كان $\varepsilon$ يرمز إلى تماثل من $T_1$ إلى $T_2$ ، فإن : $T_2 = Z_{21} \oplus \ldots \oplus Z_{2t}$ حيث $Z_{2j} = \varepsilon(Z_{1j}) \cong Z_{1j}$ . عندئذ، إن :

$$Z_{11} \oplus \ldots \oplus Z_{1t} \oplus N_1 \cong Z_{21} \oplus \ldots \oplus Z_{2t} \oplus N_2$$

وإذا كنا نعلم أنه يمكن اختصار الحلقيات الدوروية المتماثلة التي مرتبتها قوة عنصر أولي فإننا عندئذ نستطيع أن نختصر الأزواج $Z_{1j}$ و $Z_{2j}$ على التوالي ونستنتج أن $N_1 \cong N_2$ .

إذن، نفرض أن

$$Z_1 \oplus N_1 \cong Z_2 \oplus N_2 \qquad (7)$$

حيث كل من $Z_1$ و $Z_2$ حلقية دوروية مرتبتها قوة عنصر أولي وهما متماثلتان، ونثبت أن $N_1 \cong N_2$ . واضح أنه يمكننا أن نفرض أن $Z_1 \neq \{0\}$ . ليكن $\theta : Z_1 \oplus N_1 \to Z_2 \oplus N_2$ هو

التماثل المصاحب لـ (7) . عندئذ، إن $Z_2 \oplus N_2 = \theta(Z_1 \oplus N_1) = \theta(Z_1) \oplus \theta(N_1)$ وإن $\theta(Z_1) \cong Z_1 \cong Z_2$ و $\theta(N_1) \cong N_1$ . إذن، يكفي أن نثبت أن $\theta(N_1) \cong N_2$ ، وإذا وضعنا $Z_1$ و $N_1$ مكان $\theta(Z_1)$ و $\theta(N_1)$ فإنه يمكننا أن نفرض أن :

$$Z_1 \oplus N_1 = Z_2 \oplus N_2 = M$$

ليكن $\zeta_1$ و $\nu_1$ هما الإسقاطان، من $M$ إلى $Z_1$ و $N_1$ على الترتيب، المصاحبان للتفريق الأول؛ بالمثل، نعرف $\zeta_2$ و $\nu_2$ بالنسبة إلى التفريق الثاني . اعتبر التشاكل الداخلي $\zeta_1(\zeta_2 + \nu_2) = \zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\nu_2$ . إنه يساوي $\zeta_1$ لأن $\zeta_1 + \nu_2 = 1$ ، وبالتالي فإن اقتصاره على $Z_1$ هو التماثل الذاتي المحايد لـ $Z_1$. إذن، بالاستناد إلى (٩-٥) فإن اقتصار $\zeta_1\zeta_2$ أو $\zeta_1\nu_2$ على $Z_1$ يحدث تماثلا ذاتيا لـ $Z_1$ .

## الحالة الأولى

$\zeta_1 \, \zeta_2\big|_{z_1}$ تماثل ذاتي لـ $Z_1$ (إن هذا الترميز يعني اقتصار $\zeta_1\zeta_2$ على $Z_1$). ليكن $Z_2' = \zeta_2(Z_1)$ . ندعي أن

$$M = Z_2' \oplus N_1 \qquad (8)$$

الآن وفي المقام الأول، إن أي عنصر في $Z_2'$ يكون على الشكل $\zeta_2(z_1)$ حيث $z_1 \in Z_1$. إذا كان مثل هذا العنصر ينتمي أيضا إلى $N_1 = \ker\zeta_1$ فإن $\zeta_1\zeta_2(z_1) = 0$ . ولكن $\zeta_1\zeta_2$ تماثل ذاتي لـ $Z_1$، إذن $z_1 = 0$ وبالتالي فإن $\zeta_2(z_1) = 0$ . إن هذا يثبت أن $Z_2' \cap N_1 = \{0\}$ .

نود الآن إثبات أن $Z_2' + N_1 = M$ . نلاحظ أنه بما أن $Z_1 + N_1 = M$ ، فإن أي عنصر $m \in M$ يكون على الشكل $m = \bar{z}_1 + n_1$ حيث $\bar{z}_1 \in Z_1$ و $n_1 \in N_1$ . الآن، إن $\zeta_1\zeta_2$ يقرن $Z_1$ بـ $Z_1$ كلها؛ إذن $\zeta_1$ يقرن $Z_2' = \zeta_2(Z_1)$ بـ $Z_1$ كلها . إذن يوجد $z_2' \in Z_2'$ بحيث $\bar{z}_1 = \zeta_1(z_2')$ . إذن $\zeta_1(m) = \bar{z}_1 = \zeta_1(z_2')$ . إذن $\zeta_1(m - z_2') = 0$ و $m - z_2' \in \ker\zeta_1 = N_1$ . إذن $m \in Z_2' + N_1$ كما هو مطلوب . وبذلك نكون قد أثبتنا (8) . الآن، إن $Z_2' \subseteq \mathrm{im}\zeta_2 \subseteq Z_2$ وبالتالي فإننا بالاستناد إلى (٩-٦) نجد أن $Z_2 = Z_2' \oplus (Z_2 \cap N_1)$ . ولكن بالاستناد إلى (٨-١٦) فإن $Z_2$ غير قابلة للتفريق؛ بما أن $Z_2' \neq 0$ ، فإن $Z_2 \cap N_1 = \{0\}$ ، $Z_2 = Z_2'$ و $M = Z_2 \oplus N_1$ وذلك من (8). إذن

$M/Z_2 = N_1 \oplus Z_2/Z_2 \cong N_1$ وذلك بالاستناد إلى (٥-١١). بما أن $M = Z_2 \oplus N_2$ فإننا، بالمثل، نحصل على $M/Z_2 \cong N_2$. إذن، في هذه الحالة، $N_1 \cong N_2$.

**الحالة الثانية**

$\zeta_1 \nu_2|_{Z_1}$ هو تماثل ذاتي. في هذه الحالة، افرض أن $Z_2'' = \nu_2(Z_1)$. عندئذ، نستخدم $\nu_2$ بدلا من $\zeta_2$ في حجة مشابهة للحجة المستخدمة أعلاه لنجد أن

$$M = Z_2'' \oplus N_1 \qquad (9)$$

في الوضع الحالي، إن $Z_2'' \subseteq N_2$ وبالاستناد إلى (٩-٦) فإن

$$N_2 = Z_2'' \oplus N_3 \qquad (10)$$

حيث $N_3 = N_1 \cap N_2$. إذن

$$M = Z_2 \oplus N_2 = Z_2 \oplus Z_2'' \oplus N_3 \qquad (11)$$

الآن، ينتج من (9) أن $N_1 \cong M/Z_2''$. وينتج من (11) أن $M/Z_2'' \cong Z_2 \oplus N_3$. ولكن (9) تعطي $Z_2'' \cong M/N_1 \cong Z_1$ ومن الفرض $Z_1 \cong Z_2$. إذن، بالاستناد إلى (10) نجد أن $Z_2 \oplus N_3 \cong Z_2'' \oplus N_3 = N_2$. إن النتيجة النهائية لهذه السلسلة من التماثلات هي $N_1 \cong N_2$، وهذا ما أردنا إثباته. وبالتالي فإن هذا ينهي البرهان.

**ملاحظة**

نود أن نشير هنا إلى أن الحجة المستخدمة أعلاه تعتبر أساسا لمبرهنات كثيرة حول وحدانية التفريقات المباشرة في موضوعات أخرى. في خاتمة هذا الفصل، وفي التمرين الأول، سوف نعطي مثالا يوضح أن (٩-٤) لا تتحقق إذا لم نضع القيود على الحلقيات $T_i$.

**إثبات مبرهنات الوحدانية**

إن هذه المبرهنات هي (٨-٥)، والجزء المتعلق بالوحدانية في (٨-١٤).

أولا، نعالج (٨-٥). ليكن

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s = M_1' \oplus \cdots \oplus M_t'$$

حيث $M_i$ و $M_j'$ حلقيات دوروية غير تافهة مراتبها $d_i$ و $d_j'$ على الترتيب و $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$ و $d_1' \mid d_2' \mid \cdots \mid d_t'$ . نستخدم الاستقراء الرياضي على $s$. واضح أن $s = 0$ حالة تافهة، وبالتالي فإننا نفرض أن $s > 0$ . عندئذ، أيضا $t > 0$ . ليكن $u + 1$ هو أول عدد صحيح $i$ بحيث $d_i = 0$، وبالمثل نعرف $v$ بالنسبة إلى التفريق الثاني. عندئذ، بالاستناد إلى حجة (٨-٣)، فإن:

$$T = M_1 \oplus \cdots \oplus M_u = M_1' \oplus \cdots \oplus M_v' \qquad (12)$$

هي حلقية الفتل الجزئية في $M$. إذن $M/T \cong M_{u+1} \oplus \ldots \oplus M_s$ حرة ورتبتها هي $s - u$، وبالمثل فإن $M/T$ حرة ورتبتها هي $t - v$ . إذن، بالاستناد إلى (٧-٢) فإن

$$s - u = t - v \qquad (13)$$

الآن، إذا كان $s > u$، فإننا بالاستناد إلى الإستقراء، نجد أن $u = v$ و $d_1 \sim d_1', \cdots, d_u \sim d_u'$ . عندئذ، ينتج من (13) أن $s = t$. وبما أن جميع العناصر $d_{u+1}, \ldots, d_s, d_{v+1}', \ldots, d_t'$ صفرية فإن هذا يتم البرهان في هذه الحالة.

إذن، يمكننا أن نفرض أن $u = s$؛ عندئذ، ينتج من(13) أن $v = t$ و $M$ هي حلقية فتل. الآن، بما أن $d_i$ (أي، مرتبة $M_i$) تقسم $d_s$، فإن $d_sM = \sum_{i=1}^{s} d_s \; M_i = \{0\}$ .

إذن $d_sM_t' = \{0\}$ وينتج أن $d_t' \mid d_s$ . بالمثل $d_s \mid d_t'$ وبالتالي فإن $d_s \sim d_t'$ . إذن، إن مثالي الترتيب $d_sR$ لـ $M_s$ يساوي مثالي الترتيب $d_t'R$ لـ $M_t'$ وبالتالي، بالاستناد إلى (٦-١١)، فإن $M_s \cong M_t'$ . إذن، ينتج من (٩-٤) أن:

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_{s-1} \cong M_1' \oplus \cdots \oplus M_{t-1}'$$

بما أننا نستطيع هنا أن نبدل التماثل بالمساواة بالطريقة المعتادة، فإن فرض الاستقراء يخبرنا أن $s - 1 = t - 1$، أي $s = t$، وأن $d_1 \sim d_1', \ldots, d_{s-1} \sim d_{s-1}'$ . بما أن $d_s \sim d_s'$ فإن هذا يثبت المبرهنة.

الآن، يمكن إثبات الجزء المتعلق بالوحدانية في (٨-١٤) عن طريق استخدام نفس الحجة المستخدمة في إثباته في الفصل السابق.

## تمارين على الفصل التاسع

١ - لتكن $M$ مجموعة المتتاليات غير المنتهية $(z_1, z_2, \ldots)$ حيث $z_i \in \mathbb{Z}$ . نجعل $M$ حلقية على $\mathbb{Z}$ كما يلي :

$$(z_1, z_2, \ldots) + (z_1', z_2', \ldots) = (z_1 + z_1', z_2 + z_2', \ldots)$$

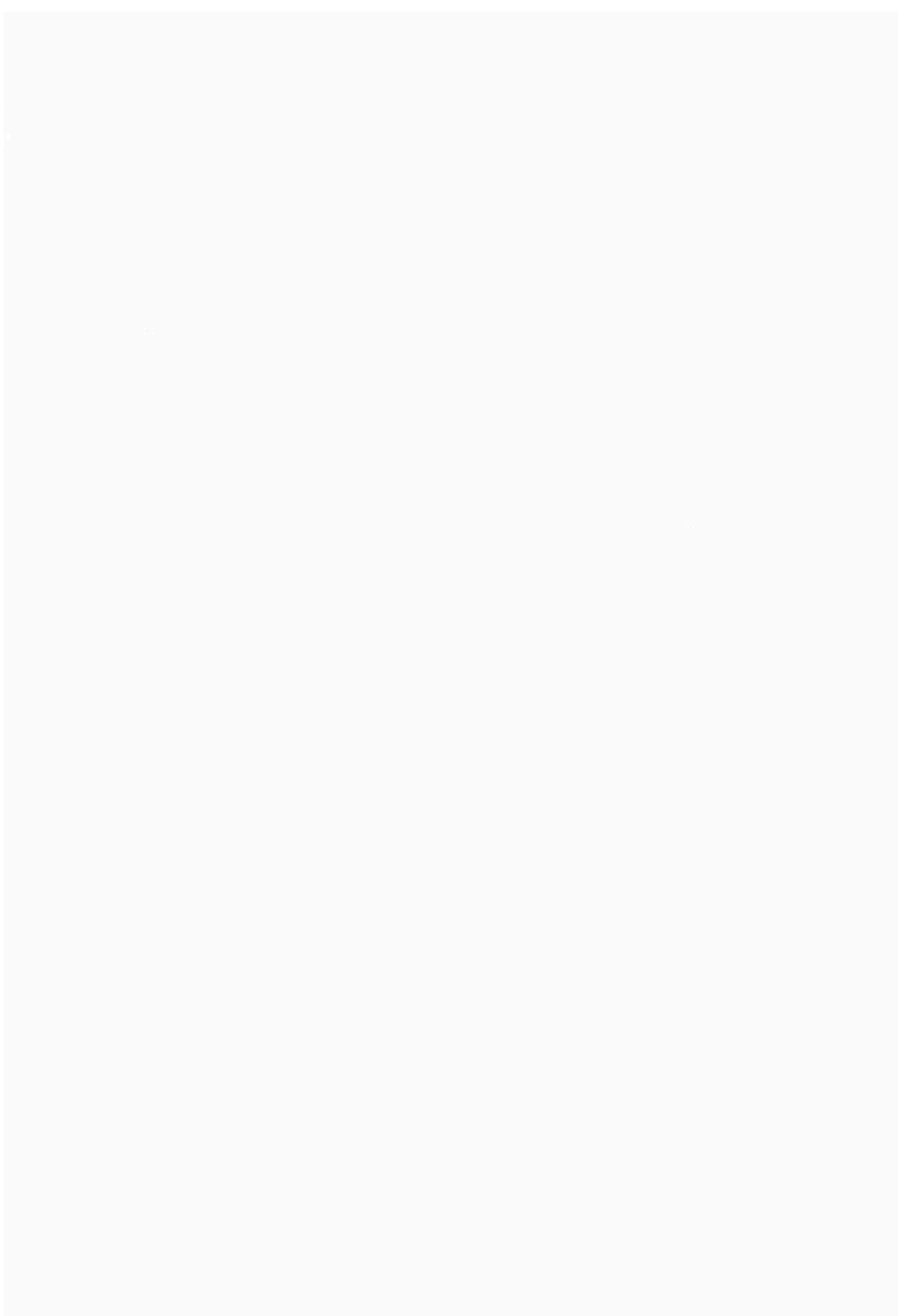
$$z(z_1, z_2, \ldots) = (zz_1, zz_2, \ldots)$$

أثبت أن $\mathbb{Z} \oplus M \cong M \cong \{0\} \oplus M$ واستنتج أن (٩-٤) غير متحققة في حالة عدم وضع قيود على الحلقيات $T_i$ . (إن $M$ هي المجموع الخارجي المباشر لـ$\mathbb{Z}$ مع نفسها عددا لانهائيا قابلا للعد (countable) من المرات) . وبرغم ذلك، أثبت أن (٩-٤) متحققة للحلقيات الاختيارية المولدة نهائيا $T_i$ (على حلقة تامة رئيسة) .

٢ - لتكن $M$ حلقية فتل من النوع $p$ مولدة نهائيا (على حلقة تامة رئيسة $R$ كالمعتاد) . افرض أن $P^{\alpha}M = \{0\}$ وأن $x \in M$ بحيث مرتبة $x$ هي $P^{\alpha}$ بالضبط . أثبت أنه توجد حلقية جزئية $N$ بحيث $M = N \oplus Rx$ .

(**إرشاد**: لتكن $M = Rx_1 \oplus \ldots \oplus Rx_t$ كما في (٨-٢) حيث مرتبة $x_i$ هي $p^{\alpha_i}$ و $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_t$ . أثبت أن $\alpha = \alpha_t$ . أكتب $x = \Sigma r_i x_i$ حيث $r_i \in R$ وأثبت أن $(r_i, p) = [1]$ لدليل ما $i$ بحيث $\alpha_i = \alpha$ . خذ $N = \sum_{j \neq i} Rx_j$ ) .

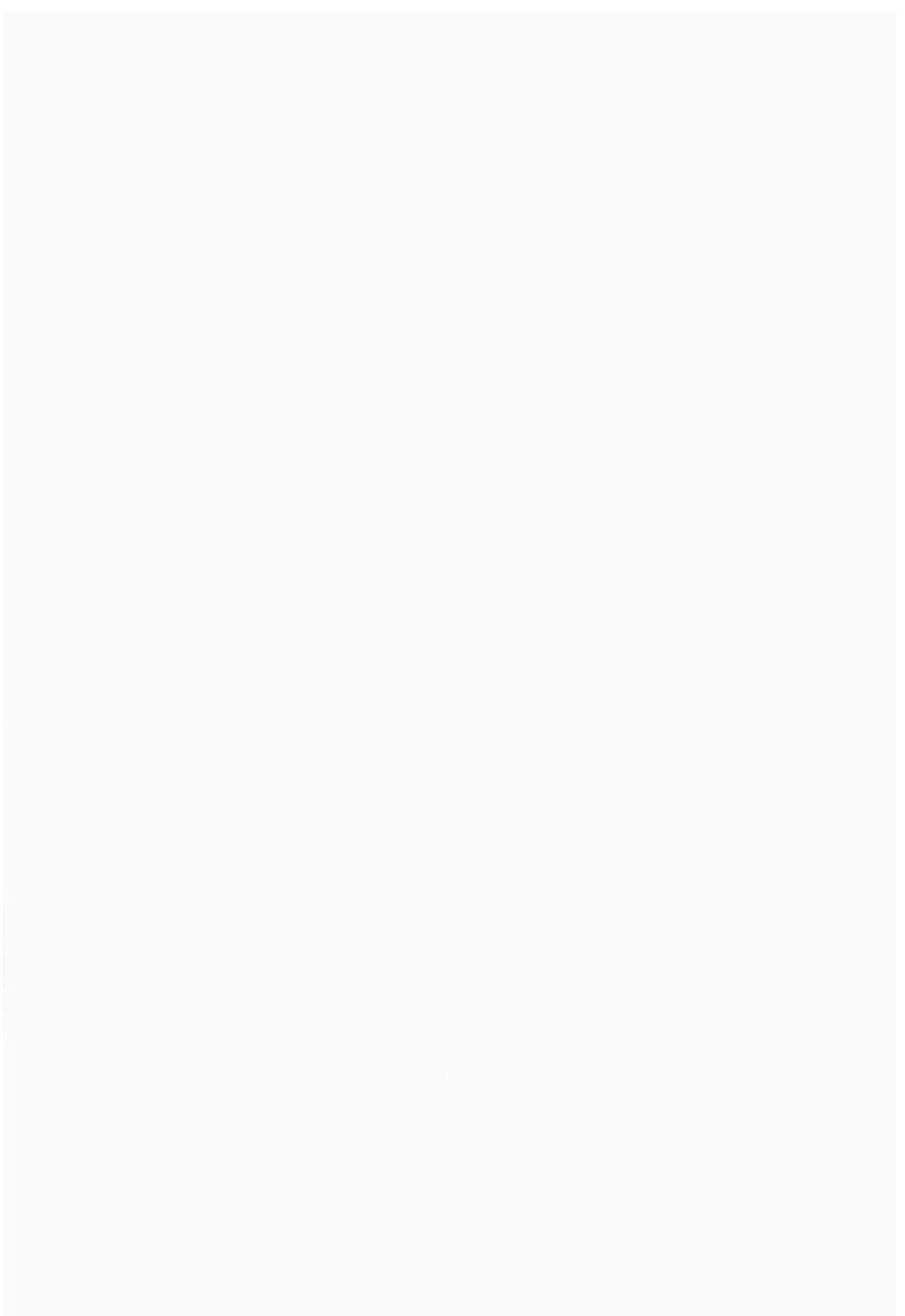
٣**- أجب عن التمرين الثاني المعطى أعلاه بدون استخدام (٨-٢) . (أولا، عالج الحالة التي تكون فيها $M$ مولدة بواسطة $x$ وعنصر آخر، ثم استخدم الاستقراء الرياضي على عدد العناصر المولدة) استنتج المأخوذة (٩-٢) .



الجزء الثالث

# تطبيقات على الزمر والمصفوفات

- الزمر الإبدالية المولدة نهائيًا
- التحويلات الخطية، المصفوفات والأشكال القانونية
- حساب الأشكال القانونية



# الفصل العاشر

## الزمر الإبدالية المولدة نهائيًا

### ١ – الحلقيات على $\mathbb{Z}$

في البند الأول من الفصل الخامس، كنا قد وصفنا الكيفية التي يمكن عن طريقها جعل زمرة إبدالية اختيارية $A$ تتمتع ببنية حلقية على $\mathbb{Z}$. إذا كان $0 < n \in \mathbb{Z}$ و $a \in A$، فإن فعل $\mathbb{Z}$ يُعرَّف كما يلي:

$$0a = 0$$

$$na = (a + \ldots + a)$$

$$(-n)a = -(a + \ldots + a)$$

حيث عدد الحدود $a$ في الطرف الأيمن هو $n$. إن هذا يطرح السؤال العكسي التالي: هل كل حلقية $M$ على $\mathbb{Z}$ زمرة إبدالية مجهزة بفعل $\mathbb{Z}$ المعرف أعلاه؟ إن مُسَلَّمات الحلقية تبين بسرعة أن الجواب هو نعم. بالاستناد إلى الملاحظة الثالثة في البند الأول من الفصل الخامس، فإن $0m = 0$ لكل $m \in M$. علاوة على ذلك، إذا كان $0 < n \in \mathbb{Z}$ فبالاستناد إلى شروط الحلقية (٢) و (٤) نجد أن

$$nm = (1 + \ldots + 1)\, m = m + \ldots + m$$

حيث عدد الحدود $m$ في الطرف الأيمن هو $n$. كذلك، بالاستناد إلى الملاحظة الثالثة المستخدمة أعلاه نجد أن:

$$(-n)m = -(nm) = -(m + \ldots + m)$$

حيث عدد الحدود $m$ في الطرف الأيمن هو $n$. إن هذا بالضبط هو فعل $\mathbb{Z}$ المعرف في بداية الفقرة. إذن، فالحلقيات على $\mathbb{Z}$ ليست سوى الزمر الإبدالية - قوارير قديمة بعلامات جديدة.

لتكن $B$ زمرة جزئية من زمرة إبدالية $A$. إذا اعتبرنا $A$ حلقية على $\mathbb{Z}$، فإن $B$ حلقية جزئية من $A$، وذلك كما رأينا في البند الثاني من الفصل الخامس. وبالعكس، إذا كانت $A$ حلقية على $\mathbb{Z}$، فإن كل حلقية جزئية من $A$ زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية التي نحصل عليها من $A$ بواسطة إهمال فعل $\mathbb{Z}$.

إذا كانت $X$ مجموعة جزئية من الزمرة الإبدالية $A$، فإن الزمرة الجزئية المولدة بواسطة $X$ هي مجموعة العناصر التي من الشكل $\Sigma n_i x_i$ حيث $n_i \in \mathbb{Z}$ و $x_i \in X$، وهذه العناصر تؤلف بالضبط $\mathbb{Z}X$ حيث $\mathbb{Z}X$ حلقية جزئية من $A$ مولدة بواسطة $X$. إذن، إن أية زمرة إبدالية مولدة نهائيا هي بالضبط حلقية مولدة نهائيا على $\mathbb{Z}$.

في جدول التحويل التالي، نلخص هذه الحقائق البسيطة وما شابهها، ونبين المصطلحات المستخدمة لوصف موقف معين من منظورين مختلفين:

| حلقية على $\mathbb{Z}$ | زمرة إبدالية |
|---|---|
| حلقية جزئية | زمرة جزئية |
| حلقية القسمة | زمرة القسمة |
| تشاكل حلقيات على $\mathbb{Z}$ | تشاكل زمر |
| حلقية (جزئية) مولدة نهائيا | زمرة (جزئية)مولدة نهائيا |
| حلقية (جزئية) دوروية | زمرة (جزئية) دوروية |
| عنصر مثالي ترتيبه $n\mathbb{Z} (n\neq 0)$ | عنصر رتبته $\vert n \vert$ |
| عنصر مثالي ترتيبه $\{0\}$ | عنصر رتبته غير منتهية |
| حلقية حرة على $\mathbb{Z}$ رتبتها $s$ | زمرة إبدالية حرة رتبتها $s$ |

بالنسبة للقارئ الذي لم يسبق له دراسة الزمر الإبدالية الحرة، فإنه يستطيع أن ينظر إلى السطر الأخير في الجدول كتعريف.

## ٢ - تصنيف الزمر الإبدالية المولدة نهائيا

إن مبرهنات التفريق الموجودة في الجزء الثاني، تجعلنا قادرين على إعطاء تصنيف تام للزمر الإبدالية المولدة نهائيا. نعني بهذا التصنيف أنه من الممكن أن نقرن كل زمرة من هذا النمط بمجموعة من اللامتغيرات التي تعين تلك الزمرة بشكل وحيد (تحت سقف التماثل طبعا)، وأنه من الممكن أن نكتب قائمة كاملة تحتوي على المجموعات الممكنة للامتغيرات. عندئذ، إن هذه القائمة هي في الحقيقة قائمة تحتوي على جميع الزمر الإبدالية المولدة نهائيا تحت سقف التماثل - إن كل زمرة إبدالية مولدة نهائيا، تقابل في القائمة مجموعة لامتغيرات والعكس صحيح. وتتماثل زمرتان إذا وفقط إذا كان لهما نفس مجموعة اللامتغيرات. علاوة على ذلك، يستطيع القارئ عادة أن يحسب لامتغيرات زمرة معطاة بشكل مباشر - فعلى سبيل المثال، إذا كانت زمرة إبدالية مولدة نهائيا معطاة بواسطة المولدات والعلاقات، فإنه توجد طريقة تمكننا من تعيين لامتغيرات الزمرة بعدد منته من الخطوات. وبالنسبة إلى الزمر الإبدالية المنتهية فإن التصنيف سوف يعين لنا عدد الزمر غير متماثلة ومن رتبة معطاة.

الآن، نخصص مبرهنات التفريق (٨-٢)، (٨-٥) و (٨-١٤) إلى حالة الحلقيات المولدة نهائيا على $\mathbb{Z}$ آخذين في الاعتبار أن $\mathbb{Z}$ حلقة تامة رئيسة، ونترجم النتائج إلى لغة الزمر.

**(١٠-١) مبرهنة**

*لتكن $A$ زمرة إبدالية مولدة نهائيا. عندئذ، يوجد لـ $A$ تفريق مباشر*

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r \oplus A_{r+1} \oplus \dots \oplus A_{r+t}$$

حيث

(i) $A_i$ *زمرة دوروية منتهية غير تافهة رتبتها* $n_i$ *لكل* $i = 1,2, \dots, r$

(ii) $A_i$ *زمرة دوروية غير منتهية لكل* $i = r+1, \dots, r+t$

(iii) $n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_r$

*إن $A$ تعين بشكل وحيد الأعداد الصحيحة $t, n_1, \dots, n_r$ التي تظهر في تفريق من هذا النمط.*

**ملاحظات**

١ - بالاستناد إلى (٨-٥)، فإن المثاليات المعينة بشكل وحيد هي $n_1\mathbb{Z}, \dots, n_r\mathbb{Z}$ فقط. ولكن $n_i$ (أي، مرتبة $A_i$)، وفق التعريف، هو المولد الموجب لمثالي ترتيب $A_i$، وهذا معين بشكل وحيد. وبالطبع، فإننا لا نستطيع أن نتحدث عن عناصر موجبة وأخرى سالبة في حلقة تامة رئيسة عامة.

٢ - إن العدد $t$ هو الرتبة الحرة من الفتل لـ $A$، وإن $n_1, \dots, n_r$ هي متتالية من لامتغيرات الفتل لـ $A$. في الحقيقة، إذا جعلنا جميع لامتغيرات الفتل موجبة فإننا نستطيع الحديث عن «متتالية لامتغيرات الفتل لـ $A$».

**(١٠-٢) نتيجة**

*إن زمرتين إبداليتين مولدتين نهائيا متماثلتان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الرتبة الحرة من الفتل ونفس متتالية لامتغيرات الفتل. إذا كان $t$ و $r$ عددين صحيحين غير سالبين وكانت $n_1 \mid \cdots \mid n_r$ متتالية من أعداد صحيحة أكبر من 1، فإنه توجد زمرة إبدالية مولدة نهائيا بحيث تكون رتبتها الحرة من الفتل هي $t$ ولامتغيرات فتلها هي $n_1, \dots, n_r$.*

**البرهـــان**

لقد سبق وأثبتنا معظم المطلوب. من أجل إنشاء زمرة ذات رتبة حرة من الفتل معطاة، وذات لامتغيرات فتل معطاة، نقوم ببساطة بتكوين مجموع مباشر خارجي من زمر دوروية غير منتهية عددها $t$ ومن زمر دوروية رتبها هي $n_1, \dots, n_r$.

إن هذا ينجز التصنيف المذكور؛ نقرن كل زمرة إبدالية مولدة نهائيا برتبتها الحرة من الفتل وبمتتالية لامتغيرات الفتل الخاصة بها. ويمكن الحصول على تصنيف آخر عن طريق المبرهنة (٨-١٤) كما يلي:

**(١٠-٣) مبرهنة**

*لتكن $A$ زمرة إبدالية مولدة نهائيا . عندئذ، يوجد لـ $A$ تفريق مباشر :*

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_s \oplus B_{s+1} \oplus \ldots \oplus B_{s+t}$$

حيث

(i) $B_i$ *زمرة دوروية غير تافهة رتبتها* $p_i^{\alpha_i}$ *قوة عدد أولي لكل* $i = 1, \ldots, s$

(ii) $B_i$ *زمرة دوروية غير منتهية لكل* $i = s+1, \ldots, s+t$ .

في أي تفريق من هذا النمط ، يكون العدد الصحيح $t$ معينا بشكل وحيد والرتب $p_i^{\alpha_i}$ معينة تحت سقف إعادة الترتيب .

لاحظ أننا لم نفرض أن جميع الأعداد الأولية $p_i$ مختلفة وأن $t$ هي الرتبة الحرة من الفتل لـ $A$ .

**(١٠-٤) تعريف**

*تسمى قوى الأعداد الأولية الموجودة في (١٠-٣) اللامتغيرات الأولية* (primary invariants) لـ $A$ .

**(١٠-٥) نتيجة**

*إن زمرتين إبداليتين مولدتين نهائيا متماثلتان إذا ، وفقط إذا كان لهما نفس الرتبة الحرة من الفتل ونفس اللامتغيرات الأولية . توجد زمرة إبدالية مولدة نهائيا بحيث تكون رتبتها الحرة من الفتل عددا صحيحا غير سالب معطى $t$ وبحيث تكون لامتغيراتها الأولية مجموعة معطاة منتهية مكونة من قوى أعداد أولية أكبر من 1 .*

## ٣ – الزمر الإبدالية المنتهية

**ترميز**

من أجل التأكيد على المضمون الزمري ، فإننا سنستخدم $C_n$ (بدلا من $\mathbb{Z}_n$) لترمز إلى زمرة دوروية رتبتها $n \geq 1$ ؛ كذلك نستخدم $C_0$ لترمز إلى زمرة دوروية غير منتهية (وذلك لأننا إذا اعتبرناها حلقية على $\mathbb{Z}$ فإن مثالي الترتيب لها يولد بواسطة 0 ) .

إذا كانت $A$ زمرة منتهية، فإن $|A|$ يرمز إلى رتبة $A$؛ أي يرمز إلى عدد العناصر في $A$. وإذا كانت $A$ دوروية، فإن هذا ينطبق مع مرتبة $A$ بالمعنى السابق.

لاحظ أنه إذا كانت $A$ و $B$ زمرتين إبداليتين منتهيتين، فإن $|A \oplus B| = |A|.|B|$، وذلك لأنه يمكن مطابقة عناصر $A \oplus B$ مع الأزواج المرتبة $(a, b)$ حيث $a \in A$ و $b \in B$. إذن، إذا كان $r \geq 1$ و $n_i \neq 0$ فإن:

$$\left| C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r} \right| = n_1 \ldots n_r$$

إذن، لكل زمرة إبدالية رتبتها $n > 1$ توجد متتالية $n_1 | n_2 | \cdots | n_r$ بحيث $r > 0$، $n_i > 1$، $n_1, \ldots, n_r = n$ وبحيث تكون هذه المتتالية لامتغيرات الفتل لتلك الزمرة، وإذا كتبنا قائمة بالمتتاليات من هذا النمط، فإننا نحصل على قائمة تضم جميع الزمر الإبدالية التي رتبتها $n$ (تحت سقف التماثل).

**مثـــال**

توجد زمرتان إبداليتان رتبة كل منهما 12، وهما $C_{12}$ و $C_6 \oplus C_2$ حيث لامتغيرات الفتل للأولى 12 وللثانية 2, 6. وبالاستناد إلى (٨-١١) فإن

$$C_{12} = C_4 \oplus C_3$$

و

$$C_2 \oplus C_6 = C_2 \oplus C_2 \oplus C_3$$

وبالتالي فإن اللامتغيرات الأوليـة لهاتين الزمرتين هي $\{2^2, 3\}$ و $\{2, 2, 3\}$ على الترتيب.

في الحقيقة، عادة يكون الأمر أسهل إذا بدأنا بتعيين اللامتغيرات الأولية الممكنة لزمرة إبدالية رتبتها $n > 1$. إذا كانت $A$ زمرة من هذا النمط فإن

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_l$$

حيث كل $A_i$ زمرة دوروية غير تافهة رتبتها قوة عدد أولي. إذا كانت $p_1, \ldots, p_k$ هي الأعداد الأولية (الموجبة) المختلفة المستعملة وإذا أعدنا ترقيم المجمعات لتصبح $A_{ij}$ حيث رتبة $A_{ij}$ هي $p_i^{\alpha_{ij}}$ و $\alpha_{i1} \leq \alpha_{i2} \leq \ldots$، فإن المجموع $B_i$ المكون من المجمعات التي رتبها قوى للعدد $p_i$ يحقق $|B_i| = p_i^{\alpha_i}$ حيث $\alpha_i = \sum_j \alpha_{ij}$ وإن

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_k$$

إذن، إن $n = |A| = p_1^{\alpha_1} \;\dots\; p_k^{\alpha_k}$ وإن هذا يجب أن يكون التحليل الوحيد للعدد $n$ إلى أعداد أولية موجبة. إذن، نحصل على اللامتغيرات الأولية الممكنة لزمرة إبدالية رتبتها $n$ عن طريق تعيين المتتاليات المختلفة $\alpha_{i1} \le \alpha_{i2} \le \dots$ لكل $i$ بحيث

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \dots = \alpha_i$$

حيث كل $\alpha_{ij}$ أكبر من أو يساوي 1، ثم تركيبها بجميع الطرق الممكنة. إن المثال العددي التالي يوضح ذلك.

**مثال محلول**

أوجد جميع الزمر الإبدالية التي رتبتها 360 (تحت سقف التماثل) معطيا اللامتغيرات الأولية ولامتغيرات الفتل لكل منها.

أولا، نلاحظ أن التحليل الأولي للعدد 360 هو $2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5$. إذا كانت $A$ زمرة إبدالية رتبتها 360 بحيث لامتغيراتها الأولية هي $\left\{2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, 3^{\beta_1}, 3^{\beta_2}, \dots, 5^{\gamma_1}, \dots\right\}$ فإن $360 = 2^{\Sigma\alpha_i}\; 3^{\Sigma\beta_i}\; 5^{\Sigma\gamma_i}$، إذن

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = 3$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \dots = 2$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots = 1$$

علاوة على ذلك، نفرض أن $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots$، . . . الخ، وأن $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \ge 1$. عندئذ، إن الإمكانيات هي

أسس لـ 2: $\{\alpha_1, \dots\} = \{3\}$، $\{1, 2\}$ أو $\{1, 1, 1\}$.

أسس لـ 3: $\{\beta_1, \dots\} = \{2\}$ أو $\{1, 1\}$.

أسس لـ 5: $\{\gamma_1, \dots\} = \{1\}$

وبتركيب هذه الإمكانيات بجميع الطرق الممكنة نجد أن هناك $(3.2.1 =)\; 6$ زمر غير متماثلة زوجا زوجا يمكن لكل منها أن تكون $A$. تحتوي القائمة التالية على هذه الزمر مع لامتغيراتها الأولية:

$A_1 = C_8 \oplus C_9 \oplus C_5$ ; $\{2^3, 3^2, 5\}$

$A_2 = C_8 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$ ; $\{2^3, 3, 3, 5\}$

$A_3 = C_2 \oplus C_4 \oplus C_9 \oplus C_5$ ; $\{2, 2^2, 3^2, 5\}$

$A_4 = C_2 \oplus C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$ ; $\{2, 2^2, 3, 3, 5\}$

$A_5 = C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$ ; $\{2, 2, 2, 3^2, 5\}$

$A_6 = C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$ ; $\{2, 2, 2, 3, 3, 5\}$

في الحقيقة، إن هذا ترميز مختصر، ويعني أن كل $A_i$ هي مجموع مباشر لزمر جزئية متماثلة مع الزمر المكتوبة $C_n$.

وللحصول على تفريق يعطينا لامتغيرات الفتل، فإننا نختار من كل مركبة أولية مجمعا رتبته أكبر ما يمكن، ثم نقوم بتركيب هذه المجمعات لنحصل على المجمع ذي الرتبة الكبرى في تفريق لامتغيرات الفتل ؛ بعد ذلك نختار من كل مركبة أولية مجمعا بحيث تلي رتبته الرتبة السابقة المختارة من حيث الكبر (إذا كان يوجد مجمع من هذا النمط)، ثم نقوم بتركيب هذه المجمعات، وهلم جرا.

بالاستناد إلى (٨-١٣) وبشكل مشابه لـ (١٠-١) فإننا نحصل بهذه الطريقة على التفريقات التالية حيث لامتغيرات الفتل كما هو معطى:

$A_1 = C_8 \oplus C_9 \oplus C_5 = C_{360}$ ; 360

$A_2 = C_3 \oplus (C_8 \oplus C_3 \oplus C_5) = C_3 \oplus C_{120}$ ; 3, 120

$A_3 = C_2 \oplus (C_4 \oplus C_9 \oplus C_5) = C_2 \oplus C_{180}$ ; 2, 180

$A_4 = (C_2 \oplus C_3) \oplus (C_4 \oplus C_3 \oplus C_5) = C_6 \oplus C_{60}$ ; 6, 60

$A_5 = C_2 \oplus C_2 \oplus (C_2 \oplus C_9 \oplus C_5) = C_2 \oplus C_2 \oplus C_{90}$ ; 2, 2, 90

$A_6 = C_2 \oplus (C_2 \oplus C_3) \oplus (C_2 \oplus C_3 \oplus C_5) = C_2 \oplus C_6 \oplus C_{30}$ ; 2, 6, 30

## ٤ - المولدات والعلاقات

إذا أخبرنا ببساطة أن $A$ زمرة إبدالية مولدة بواسطة $k$ عنصرا $a_1, \ldots, a_k \in A$ فإن معلوماتنا عن $A$ تكون قليلة جدا - بالتأكيد، إن هذه المعلومات لا تكفي لتعيين $A$ تحت سقف التماثل. فعلى سبيل المثال، إذا كان $k = 1$، فإننا نعلم فقط أن $A$ دوروية - يمكن لـ $A$ أن تكون ذات رتبة لانهائية، أو أن تكون رتبتها أي عدد منته.

ما المعلومات الإضافية التي نحتاج إليها حتى نستطيع أن نصف تماما زمرة إبدالية مولدة بعناصر معطاة $a_1, \ldots, a_k$؟ الآن، إن المعلومات المتوافرة لدينا تخبرنا أنه يمكن التعبير عن أي عنصر في $A$ بالشكل $\Sigma n_i a_i$ حيث $n_i \in \mathbb{Z}$، ولكنها لا تخبرنا متى تمثل عبارتان مختلفتان من هذا الشكل نفس العنصر في $A$، أو، بوجه خاص، متى تمثل عبارة معطاة العنصر 0. بالطبع، إن عبارتين $\Sigma n_i a_i$ و $\Sigma n_i' a_i$ تمثلان نفس العنصر في $A$ إذا وفقط إذا كان الفرق $\Sigma(n_i - n_i')a_i$ يمثل العنصر 0.

إذن، نحتاج إلى معرفة العبارات $\Sigma n_i a_i$ التي تمثل العنصر 0، أو بكلمات أخرى، نحتاج إلى معرفة «العلاقات» المتحققة بين المولدات. إذا كتبنا قائمة تامة بجميع العلاقات؛ أي قائمة بالعبارات التي تمثل الصفر، فإننا نستطيع أن نعين $A$ تماما – من الممكن أن ننظر إلى كل عنصر في $A$ على أنه «فصل من العبارات»، وتنتمي عبارتان إلى نفس الفصل (أو تمثل عبارتان نفس العنصر في $A$) إذا وفقط إذا كان الفرق بينهما عبارة من عبارات القائمة التي تمثل العنصر 0. عندئذ، نستطيع أن نجمع الفصول عن طريق جمع ممثلاتها.

على سبيل المثال، إن

$$C_6 = \langle a : 6na = 0 \text{ ، لكل } n \in \mathbb{Z} \rangle$$

(نقرأ الطرف الأيمن كما يلي: الزمرة الإبدالية المولدة بـ $a$ والمحققة للعلاقات $6na = 0$). في الحقيقة، إذا كان $a$ يولد $C_6$ فإن العبارة $ma$ تمثل الصفر إذا وفقط إذا كان $6|m$. بالمثل، إن

$$C_2 \oplus C_5 = \langle a, b : 2ma + 5nb = 0 \text{ ، لكل } m, n \in \mathbb{Z} \rangle$$

في الحقيقة، إذا كانت زمرة إبدالية مجموعا مباشرا لزمرة جزئية دوروية رتبتها 2 مولدة بـ $a$، وزمرة جزئية دوروية رتبتها 5 مولدة بـ $b$ فإن العبارة $ka + lb$ تمثل العنصر 0 إذا وفقط إذا كان $2|k$ و $5|l$.

في هذين المثالين، لاحظ أنه يمكننا أن نختصر الوصف وذلك بأن نكتب

$$C_6 = \langle a : 6a = 0 \rangle \text{ و } C_2 \oplus C_5 = \langle a, b: 2a = 5b = 0 \rangle$$

في الحقيقة، إذا كان $6a = 0$، فإن $6na = 0$ لكل عدد صحيح $n$، وإذا كان $2a = 5b = 0$ فإن $2ma + 5nb = 0$ لجميع الأعداد الصحيحة $m$ و $n$. في حالة من

هذا النمط ، فإنه يجب أن نأخذ العبارات التي تمثل الصفر على أنها التركيبات الخطية من العبارات المعطاة فقط (التي تمثل الصفر بالضرورة) .

يوجد عائقان أمام هذه المقاربة . أولا ، ما هذه «العبارات»؟ يبدو أن هذه العبارات يجب أن تكون عناصر في $A$ . ولكنها ليست كذلك ؛ لأنه من المفروض أن تستطيع عبارتان مختلفتان «تمثيل» نفس العنصر . ثانيا ، ماذا يحدث عندما نحاول إنشاء زمرة مولدة بمجموعة معطاة من العناصر تحقق علاقات معطاة ، بدلا من تعيين علاقات زمرة معروفة؟ فمثلا ، ما معنى $B = < a, b : 2a + 3b = a - 7b = 0>$؟ إذا حاولنا أن نأخذ هذه الزمرة على أنها مؤلفة من «فصول عبارات» $na + mb$ وأن عبارتين تنتميان إلى نفس الفصل إذا وفقط إذا كان الفرق بينهما تركيبا خطيا من $2a + 3b$ و $a - 7b$ ، فإننا سنواجه مسألة إثبات أن جمع الفصول عن طريق جمع ممثلاتها جمع حسن التعريف .

لحسن الحظ ، توجد مقاربة مقنعة ورائعة للمسألة كلها . واضعين نصب أعيننا تصورنا للزمرة $B$ المعطاة أعلاه ، فإننا نفرض أن $F$ زمرة إبدالية حرة أساسها $\{x, y\}$ . عندئذ ، يوجد تشاكل غامر $\varepsilon : F \to B$ بحيث $x \to a$ و $y \to b$ . إن $2a + 3b = a - 7b = 0$ تعني أن العناصر $2x + 3y$ و $x - 7y$ تنتمي إلى $\ker\varepsilon$ . كذلك إن الفكرة التي تفيد بأن العبارات الوحيدة التي من المفروض أن تمثل الصفر هي العبارات $na + mb$ التي يمكن كتابتها كتركيبات خطية من $2a + 3b$ و $a - 7b$ ، تعني بلغة دقيقة أن $\ker\varepsilon$ تتألف بالضبط من التركيبات الخطية المكونة من $2x + 3y$ و $x - 7y$ ، بكلمات أخرى إن هذه العناصر تولد $\ker\varepsilon$ . إن هذا يضع الأمور على أساس مضبوط ويبين لنا كيف نعرف ، بطريقة مضبوطة ، ما معنى تمثيل زمرة إبدالية بواسطة مولدات وعلاقات .

**(١٠-٦) تعريف**

*لتكن $A$ زمرة إبدالية مولدة بواسطة $s$ عنصرا $a_1, \ldots, a_s$ وافرض أن $(i = 1, \ldots, t)$ $(r_{1i}, \ldots, r_{si})$ هي $t$ عديدا من النوع $s$ بحيث تكون المركبات أعدادا صحيحة . نقول إن $A$ لها التمثيل* (representation) :

$$< a_1, \ldots, a_s : \sum_{j=1}^{s} r_{ji}\, a_j = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, t >$$

*أو نقول إن $A$ مولدة بواسطة* $a_1, \ldots, a_s$ (generated by) *وتحقق العلاقات المعرَّفة* (defining relations) $\sum_{j=1}^{s} r_{ji}\, a_j = 0 \ \ (i = 1, \ldots, t)$ *إذا تحقق التالي :*

*كلما كانت $F$ زمرة إبدالية حرة رتبتها $s$ ، وكان $\{f_1, \ldots, f_s\}$ أساسا لها ، وكان $\varepsilon$ هو التشاكل الغامر الوحيد $F \to A$ بحيث $\varepsilon(f_i) = a_i$ لكل $i = 1, \ldots, s$ ، فإن $\ker\varepsilon$ مولدة بالعناصر $\sum_{j=1}^{s} r_{ji}\, f_j \ \ (i = 1, \ldots, t)$ التي عددها $t$ .*

**ملاحظات**

١ - في الحقيقة ، لكي يتحقق الشرط المذكور أعلاه ، فإنه يكفي أن يتحقق لأساس واحد لزمرة إبدالية حرة واحدة . لرؤية ذلك نفرض أن $\{f_1, \ldots, f_s\}$ أساس لـ $F$ وأن $\varepsilon$ هو التشاكل الغامر الذي يرسل كل $f_i$ إلى $a_i$ ، وأن $\ker\varepsilon = K$ مولدة بواسطة العناصر $\sum_{j=1}^{s} r_{ji}\ f_j (i = 1,\ \ldots,\ t)$ . لتكن $F'$ زمرة إبدالية حرة أساسها $\{f'_1,\ \ldots,\ f'_s\}$ وليكن $\varepsilon'$ هو التشاكل الغامر الذي يرسل كل $f'_i$ إلى $a_i$ حيث نواته هي $K'$ . إذا كان $\phi$ هو التماثل $F \to F'$ المعرف بواسطة $\phi(f_i) = f'_i$ لكل $i$ وكان $\psi = \phi^{-1}$ ، فإن $\varepsilon = \varepsilon'\phi$ . إذن $\varepsilon'\phi(K) = \varepsilon(K) = \{0\}$ ، وبالتالي فإن $\phi(K) \subseteq K'$ ؛ بالمثل إن $\psi(K') \subseteq K$ . إذن $K' = \phi\psi(K') \subseteq \phi(K)$ ، وبالتالي فإننا نحصل على المساواة . إذن ، إن العناصر $\phi(\Sigma r_{ji}\ f_j) = \Sigma r_{ji}\ f'_j$ تولد $K'$ .

٢ - الآن ، ينتج أنه إذا كانت $(r_{1i}, \ldots, r_{si})$ هي $t$ عديدا من النوع $s$ بحيث تكون المركبات أعدادا صحيحة معطاة ، فإنه توجد زمرة مولدة بواسطة $s$ عنصرا ، وتحقق العلاقات المعرفة المعينة بواسطة هذه العديدات التي هي من النوع $s$ . في

الحقيقة، إذا أخذنا زمرة إبدالية حرة $F$ أساسها $\{f_1, ..., f_s\}$، وإذا جعلنا $N$ ترمز إلى الزمرة الجزئية المولدة بالعناصر $\Sigma r_{ji} f_j$ فإنه يكون لزمرة القسمة $F/N$ التمثيل المطلوب. في الحقيقة، إن العناصر $F_i + N$ تولد $F/N$ وإن التشاكل الطبيعي $\nu$ يرسل كل $f_i$ إلى $f_i + N$ وإن $\ker\nu = N$؛ حيث $N$ مولدة بالعناصر $\Sigma r_{ji} f_j$ كما هو واضح من الإنشاء.

٣ - لاحظ أننا لم نعرف «الزمرة» المولدة بعناصر معطاة والمحققة لعلاقات معرفة، ولكننا عرفنا «الزمرة الإبدالية» المولدة هكذا: نفرض أننا نفهم ضمنا أن قانون الإبدال متحقق. سوف لا نهتم بالزمر غير الإبدالية في هذا الكتاب.

كما هو متوقع، فإن النتيجة التالية تبين أن الزمرة الإبدالية المولدة بمجموعة معطاة مكونة من $s$ عنصرا والمحققة لعلاقات معرفة معطاة هي - بمعنى ما - «أكبر» زمرة إبدالية يمكن توليدها بمجموعة من العناصر عددها $s$، بحيث تحقق العناصر العلاقات المعطاة. فعلى سبيل المثال، إن الزمرة $C_3$ مولدة بعنصر واحد $a$ يحقق العلاقة $6a = 0$، ولكن هذه ليست علاقة معرفة في هذه الحالة.

### (١٠-٧) مأخوذة

*لتكن* $A =< a_1, ..., a_s : \sum_{j=1}^{s} r_{ji} a_j = 0 \quad \forall i = 1, ..., t >$ *، ولتكن* $B$ *زمرة إبدالية مولدة بالعناصر* $b_1, ..., b$ *. علاوة على ذلك، افرض أن* $\sum_{j=1}^{s} r_{ji} b_j = 0$ *لكل* $i$ *. عندئذ، يوجد تشاكل غامر* $\psi : A \to B$ *بحيث* $\psi(a_i) = b_i$ *لكل* $i = 1, ..., s$ *.*

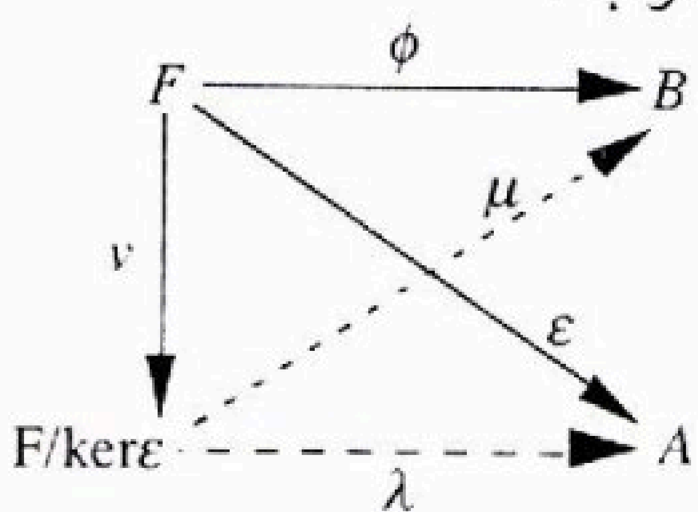
### البرهـــــان

لتكن $F$ زمرة إبدالية حرة أساسها $\{f_1, ..., f_s\}$، ليكن $\varepsilon : F \to A$ هو التشاكل الغامر الوحيد الذي يحقق $\varepsilon(f_i) = a_i\ (1 \le i \le s)$، وليكن $\phi : F \to B$ هو التشاكل الغامر الوحيد الذي يحقق $\phi(f_i) = b_i\ (1 \le i \le s)$. بالاستناد إلى (٥-٩) و (٥-١٠)

فإنه يوجد تماثـــل $\lambda : F/\ker\varepsilon \to A$ بحيث $\lambda v = \varepsilon$ حيث $v$ هو التشاكل الطبيعي . الآن ، وبالاستناد إلى التعريف ، فإن العناصر $\Sigma r_{ji} f_j$ تولد $\ker\varepsilon$ ، ومن الفرض فإن $\phi$ ترسل جميع هذه العناصر إلى الصفر . إذن $\ker\phi \geq \ker\varepsilon$ . ومن (٥-٩) ينتج أنه يوجد تشاكل $\mu : F/\ker\varepsilon \to B$ بحيث $\mu v = \phi$ . ليكن $\psi = \mu\lambda^{-1}$ . عندئذ ، فإن

$$\psi(a_i) = \psi\varepsilon(f_i) = \mu\lambda^{-1}\varepsilon(f_i) = \mu v(f_i) = \phi(f_i) = b_i$$

وبالتالي فإن $\psi$ هو التطبيق المطلوب .




## ٥ – حساب اللامتغيرات من التمثيلات

في هذه المرحلة ، من الطبيعي أن نطرح المسألة التالية : إذا أعطينا زمرة إبدالية $A$ بدلالة تمثيل بواسطة «المولدات والعلاقات» ، فماذا نستطيع أن نقول عن بنية $A$؟ على سبيل المثال ، هل نستطيع أن نعين لامتغيرات الفتل والرتبة الحرة من الفتل لـ $A$؟ إذا كان لدينا زمرة ، فمن الممكن أن تكون لها تمثيلات مختلفة ؛ فعلى سبيل المثال ، بما أن $C_6 = C_2 \oplus C_3$ فإن

$$< a, b : 2a = 3b = 0 > \quad و \quad < a : 6a = 0 >$$

تمثيلان لزمرة دوروية رتبتها $6$ . غالبا ما نهتم بمعرفة فيما إذا كان تمثيلان معطيان يعينان زمرتين متماثلتين أم لا ، وإذا كنا نستطيع الحصول على لامتغيرات زمرة ما من تمثيل ما ، فإننا نستطيع بالتأكيد أن نصل إلى تلك المعرفة .

لتكن

$$A =< a_1, \ ..., \ a_s : \sum_{j=1}^{s} r_{ji}\, a_j = 0 \qquad \forall i = 1, \ ..., \ t >$$

عندئذ ، إن $A \cong F/N$ حيث $F$ زمرة إبدالية حرة أساسها $\{f_1, ..., f_s\}$ و $N$ مولدة بالعناصر $\Sigma r_{ji} f_j$ . إذا كنا نستطيع أن نجد أساسا $\{f'_1, \ ..., \ f'_s\}$ لـ $F$ بحيث

$N = \mathbb{Z}(d_1 f'_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(d_s f'_s)$ لأعداد صحيحة مناسبة $d_1 | \cdots | d_s$ (من الممكن أن نفرض أنها غير سالبة)، فإن نتائج البند الأول من الفصل الثامن تخبرنا أن $F/N$ مجموع مباشر لزمر دوروية رتبها $d_1, \ldots, d_s$. إذا حذفنا الأعداد التي تساوي 1 من هذه المتتالية، فإننا نحصل على متتالية عوامل لامتغيرة لـ $F/N$؛ إن عدد الأصفار في هذه المتتالية هو الرتبة الحرة من الفتل لـ $F/N$ وإن العناصر الابتدائية غير الصفرية في هذه المتتالية، تكون متتالية لامتغيرات فتل لـ $F/N$ (وبالتالي لـ $A$).

الآن، إذا كانت العناصر $n_i = \Sigma r_{ji} f_j$ مستقلة خطيا فإنها تكون أساسا لـ $N$، وبالتالي فإن نتائج البند الثالث من الفصل السابع تخبرنا ماذا نعمل. نفرض أن $R = (r_{kl})$ مصفوفة الأساس $\{n_i\}$ بالنسبة إلى $\{f_j\}$، ثم نجد مصفوفتين $X$ و $Y$ قابلتين للانعكاس على $\mathbb{Z}$ بحيث $X^{-1} RY$ مصفوفة عوامل لامتغيرة لـ $R$، ثم نستخدم $X$ و $Y$ لنعين الأساسين الجديدين في $F$ و $N$ على الترتيب.

في الحقيقة، إن المعالجة السابقة تعمل حتى في حالة كون العناصر $n_i$ غير مستقلة خطيا. لرؤية ذلك، نفرض ببساطة أن $\{n_1, \ldots, n_t\}$ تولد $N$، وأن $Y = (y_{kl})$ مصفوفة قابلة للانعكـاس من النوع $t \times t$ على $\mathbb{Z}$ وأن $n'_i = \sum_{j=1}^{t} y_{ji} n_j$ لكل $i = 1, \ldots, t$. إذا كانت $Y^{-1} = (\hat{y}_{kl})$، فإن

$$\Sigma \hat{y}_{ji} n'_j = \Sigma \hat{y}_{ji} y_{kj} n_k = \Sigma y_{kj} \hat{y}_{ji} n_k = \Sigma \delta_{ki} n_k = n_i$$

إذن، فإن الزمرة الجزئية (أو الحلقية الجزئية على $\mathbb{Z}$) المولدة بالعناصر $n'_i$ تحتوي على العناصر $n_i$ وبالتالي فإنها $N$.

في الحالة العامة، نفرض أن $R = (r_{kl})$ مصفوفة المجموعة $\{n_i\}$ بالنسبة إلى $\{f_i\}$ حيث $R$ من النوع $s \times t$. وبالاستناد إلى (٧-١٠) فإنه توجد مصفوفة $X = (x_{kl})$ قابلة للانعكاس من النوع $s \times s$ على $\mathbb{Z}$ كما توجد مصفوفة $Y = (y_{kl})$ قابلة للانعكاس من النوع $t \times t$ على $\mathbb{Z}$ بحيث

$$X^{-1} RY = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_u)$$

حيث $d_1 \mid \cdots \mid d_u (u = \min\{s, t\})$ . علاوة على وجود $X$ و $Y$ فإنه توجد لدينا طريقة منتظمة لإيجاد $X$ و $Y$ . ليكن:

$$f'_i = \sum_{j=1}^{s} x_{ji} f_j \quad (i = 1, \ \ldots, \ s)$$

$$n'_i = \sum_{j=1}^{t} y_{ji} n_j \quad (i = 1, \ \ldots, \ t)$$

عندئذ، فإن $\{f'_1, \ \ldots, \ f'_s\}$ أساس لـ $F$، وبالاستناد إلى الملاحظة المذكورة أعلاه، فإن $\{n'_1, \ \ldots, \ n'_t\}$ تولد $N$. بالاستناد إلى الحجة التي تسبق التعريف (٧-٩) مباشرة، فإن مصفوفة المجموعة $\{n'_i\}$ بالنسبة إلى $\{f'_j\}$ هي $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_u)$ . الآن، ندرس حالتين هما $s \leq t$ و $t < s$ .

### الحالة الأولى

نفرض أن $s \leq t$ . عندئذ، فإن $u = t$ و $n'_i = d_i f'_i$ لكل $i = 1, \ldots, t$ . إذن نحصل على

$$N = \mathbb{Z}(d_1 f'_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(d_t f'_t) = \mathbb{Z}(d_1 f'_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(d_s f'_s)$$

حيث نعرف $d_{t+1} = \ldots = d_s = 0$ . عندئذ، نحصل على متتالية من العوامل اللامتغيرة لـ $F/N$ بواسطة حذف العناصر الابتدائية التي تساوي 1 من المتتالية $d_1, \ldots, d_t, 0, \ldots, 0$ (حيث عدد الأصفار هو $s - t$).

### الحالة الثانية

نفرض أن $t > s$ . عندئذ، فإن $u = s$ وإن $n'_i = d_i f'_i$ لكل $i = 1, \ldots, s$ وإن $n'_i = 0$ لكل $i > s$ . عندئذ، يمكن حذف العناصر $n'_{s+1}, \ \ldots, \ n'_t$ وإن $N = \mathbb{Z}(d_1 f'_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(d_s f'_s)$ ، وبالتالي فإننا نحذف العناصر التي تساوي 1 من $d_1, \ldots, d_s$ لنحصل على متتالية من العوامل اللامتغيرة لـ $F/N$ .

إذن، إذا كانت لدينا زمرة إبدالية ممثلة بعدد منته من المولدات والعلاقات فإنه يوجد مخطط منتظم لحساب لامتغيرات الفتل والرتبة الحرة من الفتل لتلك الزمرة بعدد منته من الخطوات. ويسمى المخطط من هذا النمط «خوارزمية» (algorithm). إن الموقف بالنسبة إلى الزمر الإبدالية مغاير تغايرا لافتا للنظر للموقف بالنسبة إلى الزمر العامة - نعلم أنه إذا كانت لدينا زمرة (غير إبدالية) ممثلة بعدد منته من المولدات والعلاقات، فإنه لا يمكن أن توجد خوارزمية تقرر بعدد منته من الخطوات فيما إذا كانت تلك الزمرة زمرة الوحدة أم لا.

**أمثلة محلولة**

١ - أوجد الرتبة الحرة من الفتل ولامتغيرات الفتل للزمرة الإبدالية $B = < a, b : 2a + 3b = a - 7b = 0 >$ التي ذكرت أعلاه. إن «مصفوفة العلاقات» هنا هي

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

بالاستناد إلى مخطط واضح للاختزال نجد أن:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 17 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

إذن $B = C_1 \oplus C_{17} = C_{17}$. إن الرتبة الحرة من الفتل هي 0 ويوجد لامتغير فتل واحد هو 17.

٢ - أوجد الرتبة الحرة من الفتل ولامتغيرات الفتل للزمرة الإبدالية

$$C = < a, b, c : a + b + c = 3a + b + 5c = 0 >$$

الآن، إن مصفوفة العلاقات هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لاحظ أننا في الحالة $t < s$. إذن، إن متتالية من العوامل اللامتغيرة لـ $C$ هي $2, 0$ ؛ إذن $C = C_2 \oplus C_0$، وبالتالي فإن الرتبة الحرة من الفتل لـ $C$ هي $1$، ويوجد لامتغير فتل واحد هو $2$.

٣ - أوجد تفريقا مباشرا من النمط المذكور في (١٠-١) للزمرة الإبدالية

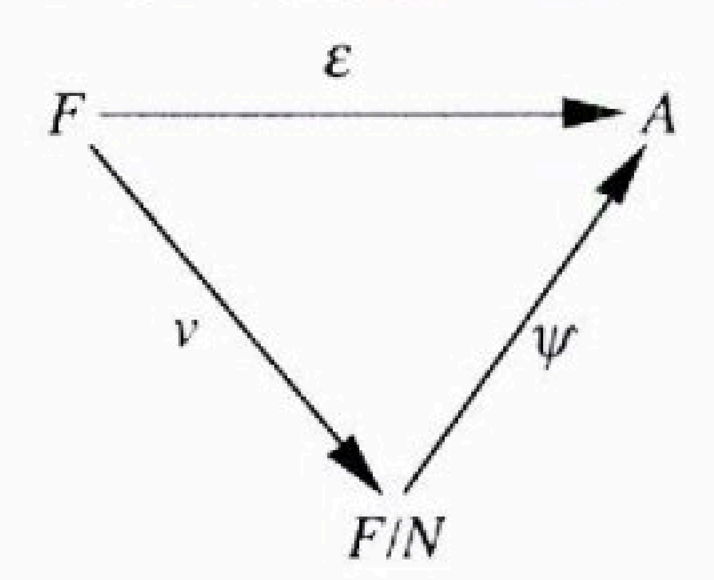
$A = < a, b, c : 7a + 4b + c = 8a + 5b + 2c = 9a + 6b + 3c = 0 >$

إن مصفوفة العلاقات هنا هي

$$R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

وبالصدفة فإننا قد اختزلنا هذه المصفوفة في نهاية الفصل السابع. إن العوامل اللامتغيرة لهذه المصفوفة هي $1, 3, 0$، وبالتالي فإن زمرتنا هي $C_3 \oplus C_0$. ولكن هذه المعلومات لا تخبرنا كيف نحصل على «الزمر الجزئية» الحقيقية في $A$ التي تعطي مثل هذا التفريق. ويمكن إيجاد هذه الزمر الجزئية كما هو مبين في الفقرة التالية.

لتكن $F$ زمرة إبدالية حرة أساسها $\{x, y, z\}$، ليكن $\varepsilon$ هو التشاكل الغامر الذي يرسل $x \to a, y \to b, z \to c$ ولتكن $N = \ker\varepsilon$. عندئذ، فإن العناصر $7x + 4y + z \ , \ 8x + 5y + 2z \ , \ 9x + 6y + 3z$ تولد $N$ وإن مصفوفة هذه العناصر بالنسبة إلى $\{x, y, z\}$ هي المصفوفة $R$ المذكورة أعلاه. إذا كانت كل من $U$ و $Y$ مصفوفة قابلة للانعكاس من النوع $3 \times 3$ بحيث $U^{-1} RY = \text{diag}(1, 3, 0)$ وكان $\{x', \ y', \ z'\}$ أساس $F$ الذي مصفوفته بالنسبة إلى $\{x, y, z\}$ هي $U$ فإننا، بالاستناد إلى الخلفيات العامة للبند الثالث من الفصل السابع، نعلم أن $N =< x' > \oplus < 3y' >$ (حيث نستخدم $< S >$ للدلالة على الزمرة المولدة بالمجموعة $S$، وذلك بدلا من $\mathbb{Z}S$). إذن، فإن $F/N$ هي المجموع المباشر لزمرة دوروية رتبتها $3$ مولدة بالعنصر $y' + N$ وزمرة لانهائية مولدة بالعنصر $z' + N$. الآن، نعتبر الرسم التخطيطي




حيث $\nu$ التشاكل الطبيعي و $\psi$ التماثل الوحيد الذي يجعل الرسم التخطيطي إبداليا . بما أن $\psi$ تماثل ، فإن $A$ هي المجموع المباشر لزمرة دوروية رتبتها 3 مولدة بالعنصر $\psi\ (y' + N) = \psi\ \nu(y') = \varepsilon\ (y')$ وزمرة دوروية لانهائية مولدة بالعنصر $\varepsilon(z')$ .

إذن نحتاج إلى أن نجد المصفوفة $U$ . إن $U^{-1}$ هي المصفوفة $X$ المعطاة في نهاية الفصل السابع . بدلا من حساب $X^{-1}$ مباشرة ، فإننا نذكر أنه قد تم الحصول على $X$ بواسطة تطبيق متتالية من العمليات الصفية على $1_3$ . إذن يمكن الحصول على $X^{-1}$ عن طريق تطبيق معكوس كل من هذه العمليات بالترتيب العكسي على $1_3$ . إن معكوس $R_i + cR_j$ و $R_i - cR_j$ (نستخدم الترميز الموجود في نهاية الفصل السابع ) ومعكوس $R_i \leftrightarrow R_j$ هو نفسه $R_i \leftrightarrow R_j$ ومعكوس $uR_i$ هو $u^{-1}R_i$ . عندئذ ، باستخدام هذه العمليات نحصل على

$$U = X^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن ، فإن $x' = 7x + 4y + z\ ,\ y' = 2x + y\ ,\ z' = x$ هو أساس $F$ المطلوب ، وإن $\varepsilon(y') = 2a + b,\ \varepsilon(z') = a$ . إذن $A = < 2a + b > \oplus < a >$ حيث الزمرة الجزئية الأولى دوروية رتبتها 3 والثانية دوروية لانهائية . إن زمرة الفتل الجزئية في $A$ هي $< 2a + b >$ ، ورغم أنه يمكن تمثيلها بمولد مختلف (على سبيل المثال $4a + 2b$) فإنها كزمرة جزئية ، معينة بشكل وحيد في أي تفريق من هذا النمط . وبشكل مغاير فإن المركبة العديمة الفتل ليست معينة بشكل وحيد ، مثال ذلك أن $A = < 2a + b > \oplus < 3a + b >$ ، وواضح أن المركبة الثانية مختلفة عن $< a >$ .

## تمارين على الفصل العاشر

١ - صنف الزمر الإبدالية التي رتبها هي (أ) 40، (ب) 136، (ج) 1080 و (د) 1001. بكلمات أخرى، لكل من الرتب المعطاة اكتب قائمة تحتوي بالضبط على ممثل واحد لكل فصل تماثل للزمر الإبدالية ذات الرتبة المعطاة. أوجد لامتغيرات الفتل واللامتغيرات الأولية لكل من الزمر التي وجدتها.

٢ - أوجد رتبة الزمرة الإبدالية $< a, b : 3a + 6b = 9a + 24b = 0 >$ وأوجد لامتغيرات الفتل لها.

٣ - أوجد الرتبة الحرة من الفتل، ولامتغيرات الفتل للزمرة

$$< a, b, c : 2a + b = 3a + c = 0 >$$

٤ - لتكن $A = <a, b, c : -4a+2b+6c = -6a+2b+6c = 7a+4b+15c = 0>$ أثبت أن $|A| = 12$. أوجد عنصرين $u$ و $v$ في $A$ بحيث رتبة $u$ هي 2 ورتبة $v$ هي 6 و $A = < u > \oplus < v >$.

٥ - اكتب بعض الأمثلة العددية المشابهة للتمارين السابقة إذا كنت تشعر أن ذلك ضروري.

٦ - أوجد زمرا جزئية غير قابلة للتفريق بحيث يكون مجموعها المباشر هو الزمرة الجمعية لـ $\mathbb{Z}_n$ حيث $n = 10, 12, 30, 252$. اكتب قائمة مفصلة تحتوي على عناصر كل زمرة جزئية واستخدم الترميز $0, 1, ..., n - 1$ (استخدم الأقواس المربعة إذا كنت تفضل ذلك) لوصف تلك العناصر، فعلى سبيل المثال $\mathbb{Z}_6 = \{0, 2, 4\} \oplus \{0, 3\}$. إن المأخوذة (٨-١١) سوف تكون مفيدة في هذا الموقف.

٧ - لتكن $R = (r_{kl})$ مصفوفة قابلة للانعكاس من النوع $s \times s$ على $\mathbb{Z}$. ماذا تستطيع أن تقول عن الزمرة

$$< a_1, \ ..., \ a_s : \sum_{j=1}^{s} r_{ji} a_j = 0 \quad \forall i = 1, \ ..., \ s > \text{؟}$$

٨ - لتكن $r, s, t, u$ أعدادا صحيحة وليكن $d = ru - st$. صف بنية $< a, b : ra + tb = sa + ub = 0 >$ حيث $d$ هو (أ) 1، (ب) 2، (ج) عدد أولي و(د) 0.

٩ - لتكن $A$ زمرة إبدالية ممثلة بـ $s$ مولدا و $t$ علاقة حيث $s > t$. أثبت أن الرتبة الحرة من الفتل لـ $A$ هي $s - t$ على الأقل.

١٠- لتكن $A$ زمرة إبدالية منتهية بحيث تكون رتب جميع عناصرها قوى عدد أولي ثابت. أثبت أن $|A|$ قوة للعدد $p$.

١١- ليكن $p$ عددا أوليا ولتكن $A$ زمرة دوروية غير تافهة رتبتها قوة للعدد $p$. أثبت أنه يوجد $p$ حلا للمعادلة $px = 0$ في $A$. أثبت أنه إذا كانت $A$ هي المجموع المباشر لـ $s$ زمرة دوروية غير تافهة رتبتها قوة للعدد $p$، فإنه يوجد $p^s$ حلا للمعادلة $px = 0$ في $A$.

١٢- ليكن $K$ حقلا منتهيا ولتكن $K^*$ هي الزمرة الضربية $K\backslash\{0\}$. أثبت أن كل مركبة أولية لـ $K^*$ دوروية وذلك عن طريق ترجمة نتيجة التمرين (١١) إلى الترميز الضربي. استنتج أن $K^*$ دوروية.

١٣** - ليكن $p$ عددا أوليا ولتكن $A$ زمرة إبدالية منتهية رتبتها قوة للعدد $p$، ولامتغيراتها الأولية هي $p^{\alpha_1}, \ldots, p^{\alpha_s}$ حيث $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_s$. لتكن $B$ زمرة جزئية من $A$. أثبت أن $B$ مجموع مباشر لزمر جزئية دوروية رتبها $p^{\beta_1}, \ldots, p^{\beta_s}$ حيث $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_s$ و $\beta_i \leq \alpha_i$ لكل $i$ (يمكن لبعض العناصر $\beta_i$ أن تساوي الصفر).
(**إرشاد**: استخدم الاستقراء الرياضي على $\Sigma\alpha_i$. إن نتيجة التمرين الثاني في الفصل التاسع مفيدة هنا). ماذا تستطيع أن تقول عن العلاقة بين لامتغيرات الفتل لزمرة إبدالية منتهية ولامتغيرات الفتل لزمرة جزئية من تلك الزمرة؟.

# الفصل الحادي عشر

## التحويلات الخطية، المصفوفات والأشكال القانونية

في هذا الفصل، نستخدم الرمز $V$ للدلالة على فضاء متجه بعده $n > 0$ على حقل $K$. بالاستناد إلى المبادئ البسيطة لنظرية الجبر الخطي، فإننا نعلم أنه إذا كان $\alpha$ تحويلا خطيا معطى من $V$ إلى $V$ فإنه يمكن تمثيل $\alpha$ بمصفوفات كثيرة من النوع $n \times n$ على $K$. في الحقيقة، لكل اختيار لأساس لـ $V$ توجد مصفوفة مقابلة وحيدة (انظر المناقشة في البند الثاني من الفصل السابع). وإذا كنا في موقف عملي فإننا نود أن نعلم كيف نستطيع أن نختار أساسا «حسنا» بحيث تكون مصفوفة $\alpha$ في أبسط شكل ممكن، أو بكلمات أخرى، بحيث تكون مصفوفة $\alpha$ في شكل هو أقرب ما يمكن إلى شكل المصفوفة القطرية. الآن، سنشغل أنفسنا بمسألة اختيار أساسات من هذا النمط. ندرس المسألة عن طريق جعل $V$ حلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$ (كما هو مبين في المثال الرابع من البند الأول من الفصل الخامس)، وملاحظة أن $K[x]$ حلقة تامة رئيسة، وتطبيق مبرهنات التفريق القوية التي حصلنا عليها في الفصل الثامن. إن الحل يقودنا إلى تصنيف العناصر $\alpha$ المنتمية إلى $\text{End}_K V$ تحت سقف إحدى علاقات التكافؤ.

### ١ - المصفوفات والتحويلات الخطية

**ترميز**

ليكن $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا لـ $V$ وليكن $\alpha \in \text{End}_K V$ حيث $\text{End}_K V$ هي حلقة التحويلات الخطية لـ $V$. لتكن $(a_{kl})$ مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى $v$؛ لقد عرفت هذه المصفوفة في البند الثاني من الفصل السابع بواسطة

$$\alpha\left(v_i\right)=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\ v_j \quad \forall i=1,\ \ldots,\ n \qquad (1)$$

وسوف نستخدم الرمز $M(\alpha, v)$ للدلالة عليها (أي على $((a_{kl}))$ . إذا كانت $v^*=\left\{v_1^*,\ \ldots,\ v_m^*\right\}$ مجموعة جزئية منتهية من $V$ فإننا نستخدم الرمز $M(v^*, v)$ للدلالة على $(b_{kl})$ حيث $(b_{kl})$ مصفوفة $v^*$ بالنسبة إلى $v$ وهي معرفة بواسطة

$$v_i^*=\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\ v_j \quad \forall i=1,\ \ldots,\ m \qquad (2)$$

ليكن $\alpha \in \mathrm{End}_K V$ ، وليكن كل من $v$ و $v^*$ أساسا لـ $V$ . عندئذ (كما رأينا في البند الثاني من الفصل السابع)، إن العلاقة بين المصفوفة $A = M(\alpha, v)$ والمصفوفة $A^* = M(\alpha, v^*)$ تعطى بالمعادلة $A^* = X^{-1}AX$ حيث $X = M(v^*, v)$ مصفوفة قابلة للانعكاس من النوع $n \times n$ . بالعكس، إذا كانت $X$ مصفوفة معطاة من هذا النمط، فإننا نستطيع أن نستخدم (2) لإنشاء أساس $v^*$ لـ $V$ بحيث تكون مصفوفته بالنسبة إلى $v$ هي $X$ ؛ عندئذ، فإن $M(\alpha, v^*) = X^{-1}AX$ . إن هذا يحثنا على إعطاء التعريف التالي :

**(١١-١) تعريف**

*ليكن $A, B \in M_n(K)$ . نقول إن $A$ مشابهة (similar) لـ $B$ إذا وفقط إذا كانت توجد مصفوفة $X$ قابلة للانعكاس من النوع $n \times n$ على $K$ بحيث $B = X^{-1}AX$ .*

يستطيع القارئ أن يرى بسهولة أن التشابه يكون علاقة تكافؤ على $M_n(K)$ . بالاستناد إلى ذلك، فإنه إذا كان $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$ وكانت مصفوفته بالنسبة إلى أساس معين $v$ هي $A$ ، فإن المصفوفات الكثيرة التي يمكن تمثيل $\alpha$ بها بالنسبة إلى الأساسات الكثيرة لـ $V$ ، هي بالضبط المصفوفات المشابهة لـ $A$ . إذن، فالمسألة التي ذكرناها في المقدمة تكافئ المسألة التالية :

إذا كانت $A$ مصفوفة معطاة من النوع $n \times n$ على $K$ ، فأوجد مصفوفة $A^*$ بحيث تكون ذات شكل بسيط ومشابهة لـ $A$ ، وأوجد مصفوفة $X$ قابلة للانعكاس على $K$ بحيث $X^{-1}AX = A^*$ .

في الحقيقة، افرض أنه قد تم حل المسألة الأصلية المتعلقة بإيجاد أساس حسن بالنسبة إلى تشاكل داخلي، وافرض أن $A$ مصفوفة معطاة من النوع $n \times n$ على $K$. باستخدام (1) فإننا نجعل $A$ تعمل كتشاكل داخلي $\alpha$ لفضاء متجه $V$ بالنسبة إلى أساس $v$ حيث $V$ نموذج أصلي لفضاء متجه بعده $n$ (عادة، نأخذ الفضاء $K^n$ الذي يتكون من العديدات من النوع $n$ التي عناصرها تنتمي إلى $K$، ونأخذ الأساس $\{e_1, ..., e_n\}$ حيث $e_i$ هو المتجه الذي يتكون من 1 في المكان ذي الرقم $i$ ومن 0 في الأماكن الأخرى). عندئذ، إن الحل الذي تم الوصول إليه يخبرنا عن الكيفية التي يجب أن نختار بها أساسا $v^*$ لـ $V$ بحيث يكون شكل $M(\alpha, v^*)$ هو الشكل البسيط المطلوب. ولكن $M(\alpha, v^*) = X^{-1}AX$ حيث $X = M(v^*, v)$، وبالتالي فإننا نكون قد وصلنا إلى حل المسألة الثانية. وإذا ناقشنا في الاتجاه العكسي، فإننا نجد أنه إذا حلت المسألة الثانية فإننا نستطيع أن نحل المسألة التي بدأنا بها.

إن المسألة الثانية مهمة في كثير من مجالات الرياضيات البحتة والتطبيقية. سنكتفي هنا بذكر موقف يظهر في نظرية الزمر. لتكن $G = GL_n(K)$ الزمرة الضربية المكونة من جميع المصفوفات القابلة للانعكاس من النوع $n \times n$ على $K$ - يمكن النظر إلى هذه الزمرة على أنها زمرة عناصر الوحدة في $M_n(K)$. عندئذ، يكون عنصران في $G$ متشابهين إذا وفقط إذا كانا عنصرين مترافقين في $G$. إذن، إذا حلت المسألة الثانية، فإننا نستطيع أن نجد في كل فصل ترافق لـ $G$ مصفوفة ذات شكل بسيط، وبالتالي فإننا نحصل على معلومات حول فصول الترافق لـ $G$، وفي الحقيقة نحصل على تصنيف لفصول الترافق. إن هذه المعلومات مهمة في موضوعات كثيرة وبوجه خاص في نظرية تمثيل الزمر.

## ٢ - الفضاءات الجزئية اللامتغيرة

سبق أن ذكرنا الفضاءات الجزئية اللامتغيرة في المثال الأول في البند الثاني من الفصل الخامس. نذكر بأنه إذا كان $\alpha \in \mathrm{End}_K V$، وكان $U$ فضاء جزئيا من $V$، فإن $U$ فضاء جزئي لامتغير بالنسبة إلى $\alpha$ إذا كان يحقق الشرط $\alpha(U) \subseteq U$. إن هذه الفضاءات الجزئية اللامتغيرة وثيقة الصلة بالمسألة التي نعالجها وذلك للسبب التالي:

**(١١-٢) مأخوذة**

ليكن $\alpha \in \mathrm{End}_K V$ وافرض أن $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ حيث $V_i$ لا متغير بالنسبة إلى $\alpha$ لكل $i$. ليكن $v^{(i)}$ أساسا لـ $V_i$ لكل $i = 1, \ldots, k$ وليكن $v = \bigcup_{i=1}^{k} v^{(i)}$. عندئذ، فإن $v$ أساس لـ $V$ وإن $M(\alpha, v)$ تكون من الشكل

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \boxed{A_k} \end{bmatrix}$$

حيث القطاعات $A_i$ (blocks) موضوعة قطريا و $A_i = M\left(\alpha\big|_{V_i}, v^{(i)}\right)$، وحيث جميع عناصر $A$ التي تقع خارج القطاعات $A_i$ تساوي الصفر. إن $A_i$ مصفوفة من النوع $n_i \times n_i$ حيث $n_i = \dim V_i$.

بالعكس، إذا كانت مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى أساس $v$ لـ $V$ هي من الشكل الموصوف أعلاه، فإن $V$ ينشطر كمجموع مباشر لفضاءات جزئية لا متغيرة بالنسبة إلى $\alpha$ عددها $k$، وذلك كما هو موصوف أعلاه.

**البرهـــان**

نفرض أن القارئ حسن الاطلاع على المجموع المباشر للفضاءات الجزئية. وعلى أي حال، إن هذا ليس إلا المجموع المباشر لحلقيات جزئية على $K$ إذا نظرنا إلى $V$ على أنه حلقية على $K$.

ليكـــن $v^{(i)} = \left\{v_{j_{i-1}+1}, \ldots, v_{j_i}\right\}$ حيـــث $j_0 = 0$، $j_k = n = \dim V$ و $j_i - j_{i-1} = n_i = \dim V_i$. عندئذ، فإن $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$. بما أن $V = \Sigma V_i$، فإنه يمكن التعبير عن أي عنصر $x \in V$ على الشكل $x = x_1 + \ldots + x_k$ حيث $x_i \in V_i$. عندئذ، يمكن التعبير عن $x_i$ كتركيب خطي من عناصر $v^{(i)}$، وبالتالي فإنه يمكن التعبير عن $x$

$v = \bigcup_{i=1}^{k} v^{(i)}$ . إذا كان $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, v_j = 0$ حيث $\lambda_i \in K$ كتركيب خطي من عناصر من

فإننا نحصل عندئذ على $y_1 + \ldots + y_k = 0$ حيث نجمع $y_i = \Sigma \lambda_j v_j$ من $j = j_{i-1} + 1$ إلى $j_i$؛ أي نجمع على عناصر أساس $V_i$ . بما أن المجموع $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ مباشر، فإن $y_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq k$ . وبما أن $v^{(i)}$ أساس لـ $V_i$، فإن $\lambda_j = 0$ لكل $j_{i-1} + 1 \leq j \leq j_i$ وبالتالي لكل $j$. إذن، إن $v$ أساس لـ $V$ .

افرض أن $j_{i-1} + 1 \leq j \leq j_i$ . عندئذ، إن $v_j \in V_i$ وبالتالي فإن $\alpha(v_j) \in V_i$ . إذن،

فإن $\alpha(v_j)$ تركيب خطي من عناصر $v^{(i)}$ ؛ أي أن $\alpha\left(v_j\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \, v_l$ حيث $a_{lj} = 0$ إلا إذا كان $j_{i-1} + 1 \leq l \leq j_i$ . إذن، إذا كانت $A = M(\alpha, v)$ فإن العناصر غير الصفرية التي يمكن أن تظهر في الأعمدة $j_{i-1} + 1, \ldots, j_i$ في $A$ لا بد لها أن تظهر في الصفوف $j_{i-1} + 1, \ldots, j_i$، وبالتالي فإننا نحصل على قطاع $A_i$ كما هو موصوف . واضح أن $A_i$ مصفوفة $\alpha|_V$ بالنسبة إلى $v^{(i)}$ حيث $\alpha|_V$ هو اقتصار $\alpha$ على $V$، وأن $A_i$ من النوع $n_i \times n_i$ .

نترك للقارئ إثبات العكس، ويمكنه أن يفعل ذلك عن طريق عكس الحجة السابقة .

## ترمـــيز

١ - لتكن $V_1, \ldots, V_k$ فضاءات جزئية من $V$ بحيث $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ ولكل $i$ افرض أن $\alpha_i$ عنصر في $\text{End}_K V_i$ . نعرف عنصرا $\alpha \in \text{End}_K V$ كما يلي : إذا كان $v \in V$ فاكتب $v = v_1 + \ldots + v_k$ حيث $v_i \in V_i$ ولاحظ أن $v$ يعين العناصر $v_i$ بشكل وحيد ثم عرف $\alpha(v)$ بواسطة

$$\alpha(v) = \alpha_1(v_1) + \ldots + \alpha_k(v_k)$$

يستطيع القارئ أن يتحقق بسهولة من أن $\alpha$ تحويل خطي لـ $V$ ؛ يسمى $\alpha$ «المجموع المباشر» *(direct sum)* لـ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ويكتب $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k$ .

إذن، الترميز $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k$ سوف يقتضي دائما أن $\alpha_i$ تحويل خطي لفضاء جزئي $V_i$ من $V$، وأن $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ .

٢ - إن المصفوفة $A$ التي تكون من الشكل المعطى في (١١-٢)، تسمى «المجموع القطري» (diagonal sum) للمصفوفات $A_i$ وتكتب $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ .

إن المأخوذة (١١-٢) تظهر التقابل بين تفريقات $\alpha$ كمجموع مباشر غير تافه لتحويلات خطية لفضاءات جزئية من $V$ ومصفوفات $\alpha$ التي هي مجموع قطري غير تافه لمصفوفات أصغر .

## ٣ - $V$ كحلقية على $K[x]$

لقد شرحنا شرحا مطولا في السابق كيف نجعل $V$ حلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$ ، حيث $\alpha$ تحويل خطي معطى لـ $V$ (انظر المثال الرابع في البند الأول من الفصل الخامس) .
إذا كان $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r \in K[x]$ و $v \in V$ فإن $fv$ يعرف بواسطة

$$fv = f(\alpha)(v) = a_0v + a_1\alpha(v) + \ldots + a_r\alpha^r(v)$$

وكما لاحظنا ، إن الاختيارات المختلفة لـ $\alpha$ تقابل بنى مختلفة لـ $V$ كحلقية على $K[x]$ ، ولكننا سوف نتعامل مع عنصر ثابت $\alpha$ طوال هذه الدراسة .

علاوة على ذلك ، إن الحلقيات الجزئية على $K[x]$ في $V$ هي بالضبط الفضاءات الجزئية اللامتغيرة في $V$ (انظر المثال الخامس في البند الثاني من الفصل الخامس) . إذن ، إن تفريقا لـ $V$ كمجموع مباشر من الحلقيات الجزئية على $K[x]$ هو نفس الشيء كتفريق لـ $V$ كمجموع مباشر من الفضاءات الجزئية اللامتغيرة بالنسبة إلى $\alpha$ ، ويمكن أن نحصل على مثل هذه التفريقات عن طريق استخدام نتائج الفصل الثامن وذلك بعد ملاحظة أن $V$ حلقية مولدة نهائيا على $K[x]$ . ومع ذلك ، فإننا سوف نهتم في البداية ببعض خواص $K[x]$ التي تجعل التعامل مع هذه الحلقة ألطف من التعامل مع حلقة تامة رئيسة عامة أو حتى مع حلقة إقليدية عامة .

### ملاحظة

بالطبع ، نستطيع أيضا النظر إلى $V$ على أنه حلقية على $K$ . ومع ذلك فإنه من المناسب أن نواصل استخدام المصطلح «فضاء متجه» للدلالة على بنية $V$ كفضاء متجه عادي وأن نحتفظ بالمصطلح «حلقية» للدلالة على بنية $V$ كحلقية على $K[x]$ التي قد تكلمنا عنها أعلاه .

**(١١-٣) تعريف**

*إذا كانت $f \in K[x]$ كثيرة حدود غير صفرية، فإننا نقول إن $f$ واحدية* (monic) *إذا كان معاملها الأعلى يساوي 1؛ أي أن $f$ تأخذ الشكل*

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_{r-1} x^{r-1} + x^r \quad (a_i \in K, r \geq 0)$$

**(١١-٤) مأخوذة**

*إن أية كثيرة حدود غير صفرية في $K[x]$ تتشارك مع كثيرة حدود واحدية وحيدة.* بوجه خاص، *إن كثيرات الحدود الواحدية المختلفة تكون غير متشاركة.*

**البرهـــــان**

نذكر بأن عناصر الوحدة في $K[x]$ هي عناصر $K^*$، وعادة ما يشار إلى هذه العناصر على أنها السُلَّميات غير الصفرية أو الثوابت غير الصفرية. إذن، تكون كثيرتا حدود متشاركتين إذا وفقط إذا كانت إحداهما مضاعفا سُلَّميا غير صفري للأخرى. إذا كانت كل واحدة من كثيرتي الحدود المتكلم عنهما واحدية فإن مقارنة الحد ذي الدرجة العليا في الأولى بالحد ذي الدرجة العليا في الثانية تعطينا أن السُلَّمي الذي نحن بصدده يجب أن يكون 1، وبالتالي فإن كثيرتي الحدود متساويتان. علاوة على ذلك، إن كل كثيرة حدود غير صفرية تتشارك مع كثيرة الحدود الواحدية التي نحصل عليها عن طريق قسمة كثيرة الحدود المعطاة على معاملها الأعلى.

تؤدي كثيرات الحدود الواحدية دورا مشابها للدور الذي أدته الأعداد الصحيحة الموجبة في الفصل السابق. لتكن $M$ حلقية على $K[x]$ وليكن $m \in M$، وليكن $J$ هو مثالي ترتيب $m$؛ عندئذ، بما أن $K[x]$ حلقة تامة رئيسة، فإنه يوجد $f \in K[x]$ بحيث $J = K[x]f$. بالاستناد إلى (٤-٤)(iv) فإن العناصر التي يمكن توليد $J$ بها هي بالضبط العناصر المتشاركة مع $f$. إذن، إذا كان $J \neq \{0\}$ فإنه توجد كثيرة حدود واحدية «وحيدة» مولدة لـ $J$، وبالتالي فإننا، عند الحديث عن «مرتبة $m$»، نقصد بذلك كثيرة الحدود الواحدية هذه. أما إذا كان $J = \{0\}$، فإنه لا يوجد أي غموض متعلق بمرتبة $m$. إن هذا مشابه للموقف الذي ننظر فيه إلى رتبة عنصر في زمرة إبدالية على أنها المولد الموجب الوحيد لمثالي ترتيب ذلك العنصر.

بما أن $K[x]$ حلقة تامة رئيسة، فإن العناصر الأولية في $K[x]$ هي كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل؛ أي العناصر غير القابلة للتحليل بالمعنى المعتاد. ويكون من المناسب غالبا أن نتعامل مع العناصر الواحدية غير القابلة للتحليل، لأنه لا يمكن لعنصرين مختلفين من هذا النمط أن يكونا متشاركين. ومن هذا المنظور، فإن العناصر الواحدية غير القابلة للتحليل تشابه العناصر الأولية الموجبة في $\mathbb{Z}$. الآن، يمكن أن نكتب مبرهنة التحليل الوحيد في $K[x]$ بشكل أقوى، كما يلي:

إذا كان $0 \neq f \in K[x]$، فإنه يمكن كتابة $f$ على الشكل $f = ap_1 \dots p_r$ حيث $a$ سُلَّمي غير صفري والعناصر $p_i$ كثيرات حدود واحدية غير قابلة للتحليل و $r \geq 0$. في مثل هذا التحليل، يكون السلمي $a$ وحيد التعيين، وتكون العناصر الواحدية غير القابلة للتحليل $p_1, \dots, p_r$ معينة تحت سقف الترتيب الذي تظهر به.

قبل أن نبدأ بتطبيق مبرهنات الترفيق الموجودة في الفصل الثامن على $V$، حيث $V$ حلقية على $K[x]$، فإننا نحتاج إلى التأكد من أن $V$ مولدة نهائيا.

**(١١-٥) مأخوذة**

*إذا استخدمنا الترميز المقدم أعلاه فإن $V$ حلقية فتل مولدة نهائيا على $K[x]$.*

**البرهـــــان**

ليكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ أساسا لـ $V$. عندئذ، يمكن كتابة أي عنصر $v \in V$ على الشكل $v = \Sigma a_i v_i$ حيث $a_i \in K$. بما أننا نستطيع أن ننظر إلى عناصر $K$ على أنها كثيرات حدود ثابتة، فإنه يمكن النظر إلى $v$ على أنه تركيب خطي من $v_1, \dots, v_n$ حيث تنتمي المعاملات إلى $K[x]$، وبالتالي فإن $v_1, \dots, v_n$ تولد $V$ كحلقية على $K[x]$.

الآن، بما أن $\dim V = n$، فإن العناصر $v, \alpha(v), \dots, \alpha^n(v)$ (التي عددها $n+1$) تكون غير مستقلة خطيا على $K$. إذن، توجد عناصر $b_0, \dots, b_n \in K$، أحدها على الأقل لا يساوي الصفر، بحيث

$$b_0 v + b_1\, \alpha(v) + \dots + b_n\, \alpha^n(v) = 0$$

إذن $fv = 0$ حيث $f$ كثيرة الحدود غير الصفرية $b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$. إذن $V$ حلقية فتل.

الآن، نستطيع تطبيق المبرهنة (٨-٢) على $V$، ونجد أنه إذا نظرنا إلى $V$ على أنها حلقية على $K[x]$، فإنه يمكن التعبير عن $V$ كمجموع مباشر $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ حيث كل $V_i$ هي حلقية جزئية دوروية غير تافهة مرتبتها $d_i$ و $d_1 \mid \cdots \mid d_s$. بما أن $V$ حلقية فتل فإنه لا تظهر أية حلقية جزئية دوروية عديمة الفتل، وبالتالي يمكن أخذ كل $d_i$ على أنها واحدية. بما أننا قد فرضنا أن كل $V_i$ مختلف عن $\{0\}$، فإن كل $d_i$ مختلف عن 1. الآن، إن كل $V_i$ فضاء جزئي لامتغير بالنسبة إلى $\alpha$ وبالتالي ينتج من (١١-٢) أن $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_s$ حيث $\alpha_i = \alpha\big|_{V_i}$.

**(١١-٦) تعريف**

*ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$، ولتكن $V$ حلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$. نقول إن $\alpha$ دوروي من المرتبة $f$ إذا كانت الحلقية $V$ دوروية من المرتبة $f$.*

نترك دراسة هذا المفهوم بشكل مؤقت، ويمكننا الآن أن نستنتج من المبرهنتين (٨-٢) و (٨-٥) ما يلي:

**(١١-٧) مبرهنة**

*لتكن $\alpha \in \mathrm{End}_K V$. عندئذ، يمكن التعبير عن $\alpha$ على الشكل $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_s$ $(s > 0)$ حيث:*

(i) *$\alpha_i$ تحويل خطي دوروي مرتبته كثيرة حدود واحدية غير ثابتة $d_i$،*

(ii) $d_1 \mid \cdots \mid d_s$.

*إن كثيرات الحدود الواحدية الناتجة عن تفريق لـ $\alpha$ محقق لـ (i) و (ii) تكون معينة بشكل وحيد بواسطة $\alpha$.*

إن النص المتعلق بالوحدانية صحيح، لأن أي تفريق من هذا النمط لـ $\alpha$ يقابل تفريقا «لامتغير الفتل» لـ $V$ حيث $V$ حلقية على $K[x]$. بالمثل، من (٨-١٤) نحصل على ما يلي:

**(١١-٨) مبرهنة**

*ليكن $\alpha \in \text{End}_K V$ . عندئذ، يمكن التعبير عن $\alpha$ على الشكل $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_r \ (r > 0)$ حيث كل $\alpha_i$ تحويل خطي دوروي مرتبته قوة $q_i^{s_i} \ (s_i > 0)$ حيث $q_i$ كثيرة حدود أولية واحدية .*

إن مجموعة القوى الأولية الواحدية الناتجة عن تفريق من هذا النمط لـ$\alpha$ ، تكون معينة بشكل وحيد بواسطة $\alpha$ تحت سقف الترتيب الذي تكتب القوى به .

**ملاحظة**

إذا نظرنا إلى الفضاء الجزئي $V_i$ الذي يؤثر $\alpha$ فيه على أنه حلقية على $K[x]$ ، فإن هذه الحلقية دوروية ومرتبتها قوة عنصر أولي ، وبالتالي ، بالاستناد إلى (٨-١٦) نجد أنها غير قابلة للتفريق . إذن ، لا يمكن تفريق $V_i$ إلى مجموع مباشر لفضاءين غير تافهين ولامتغيرين بالنسبة إلى $\alpha$ ، وبالتالي فإن تفريق $\alpha$ المعطى أعلاه في (١١-٨) هو «التفريق الأكثر تهشيما» الذي يمكن الحصول عليه .

الآن ، نسأل أنفسنا عن معنى كون التحويل الخطي دورويا من المرتبة $f$ . للإجابة عن هذا السؤال ، فإننا نذكر أنفسنا بخواص «كثيرة الحدود الأصغرية» (minimal polynomial) لتحويل خطي $\alpha$ .

ليكن $J = \{h \in K[x] : h(a) = 0\}$ . إذن ، $J$ تتكون من جميع كثيرات الحدود $h = a_0 + a_1x + \ldots + a_r x^r \in K[x]$ التي تحقق $a_0v + a_1\alpha(v) + \ldots + a_r\alpha^r(v) = 0$ لكل $v \in V$ . يستطيع القارئ أن يثبت بسهولة أن $J$ مثالي في $K[x]$ . علاوة على ذلك فإننا ندعي أن $J \neq \{0\}$ . في الحقيقة ، بالنسبة إلى عملية الجمع وعملية الضرب السلمي فإن $\text{End}_K V$ فضاء متجه بعده $n^2$ على $K$ . إن أسهل طريقة لرؤية ذلك هي استخدام الحقيقة التي مفادها أن $\text{End}_K V \cong M_n(K)$ ، وأن نلاحظ أن $M_n(K)$ فضاء متجه على $K$ أساسه مكون من $n^2$ مصفوفة $E_{ij}$ حيث $E_{ij}$ هي المصفوفة التي تحتوي على 1 في المكان $(i, j)$ وعلى 0 في الأماكن الأخرى . إذن ، إن العناصر $I, \alpha, \ldots, \alpha^{n^2}$ التي عددها $n^2 + 1$ تكون غير مستقلة خطيا على $K$ (حيث $I$ يرمز إلى التحويل الخطي المحايد) ،

وبالتالي فإنه توجد عناصر مناسبة $a_i \in K$، أحدها على الأقل مختلف عن الصفر، بحيث $a_0 I + a_1\alpha + \cdots + a_{n^2}\alpha^{n^2} = 0$ حيث 0 يرمز إلى التحويل الصفري.

وبالتالي فإن $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n^2} x^{n^2}$ كثيرة حدود غير صفرية منتمية إلى $J$.

عندئذ، نستنتج من الملاحظات التي تلت (١١-٤) أنه يوجد مولد واحدي وحيد لـ $J$، ويسمى هذا المولد كثيرة الحدود الأصغرية لـ $\alpha$ ونرمز له بالرمز $\min \alpha$. لاحظ أن $\min \alpha$ كثيرة حدود في $K[x]$ وأنها معينة بشكل وحيد بواسطة الخواص التالية:

(i) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \min\alpha | g$

(ii) $\min \alpha$ واحدية.

ينتج من (i) أنه إذا كانت $g$ كثيرة حدود غير صفرية بحيث $g(\alpha) = 0$، فإن درجتها تكون أكبر من أو تساوي درجة $\min \alpha$. إذن، $\min \alpha$ هي أيضا كثيرة الحدود الواحدية الوحيدة ذات الدرجة الصغرى التي تفني $\alpha$. وبلا شك فإن القارئ قد ألفَ معظم هذه المعلومات التي هي من مبادئ الجبر الخطي.

**(١١-٩) مأخوذة**

*ليكن $\alpha \in \mathrm{End}_K V$. عندئذ، فإن $\alpha$ دوروي إذا وفقط إذا كان يوجد $v \in V$ بحيث تكون العناصر $v, \alpha(v), \alpha^2(v), \ldots$ مولدة لـ $V$ (كفضاء متجه). في تلك الحالة، إن $v$ يولد $V$ كحلقية على $K[x]$ وإن مرتبة $\alpha$ هي كثيرة الحدود الأصغرية لـ $\alpha$.*

**البرهـــــان**

بالطبع، إن القول بإن العناصر $v, \alpha(v), \ldots$ تولد $V$ يعني أنه يمكن التعبير عن كل عنصر في $V$ كتركيب خطي من مجموعة منتهية من هذه العناصر. نفرض أن $v, \alpha(v), \ldots$ تولد $V$. عندئذ، إذا كان $u \in V$، فإن $u = a_0 v + a_1\alpha(v) + \ldots + a_r\alpha^r(v)$ حيث $a_i \in K$ عناصر مناسبة ويمكن لبعضها أن يساوي الصفر، وبالتالي فإن $u = gv$ حيث $g = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r \in K[x]$. إذن، إن $v$ يولد $V = K[x]v$ كحلقية على $K[x]$. بالعكس، إذا كان $V = K[x]v$ وإذا عكسنا الحجة المستخدمة أعلاه، فإننا نجد أن $v, \alpha(v), \ldots$ تولد $V$.

بالاستناد إلى التعريف (١١-٦)، نجد أنه إذا كانت مرتبة $\alpha$ هي $f$ فإن مرتبة $v$ هي $f$ حيث $v$ يولد $V$ كحلقية على $K[x]$؛ أي أن $f$ هي المولد الواحدي الوحيد للمثالي $\mathbf{o}(v)$. ولكن بالاستناد إلى الملاحظة الثانية التي تلي المبرهنة (٦-١١) فإن:

$$\mathbf{o}(v) = \{g \in K[x] : gV = \{0\}\} = \{g \in K[x] : g(\alpha) = 0\}$$

وإن المولد الواحدي الوحيد لهذا المثالي هو $\min \alpha$ وذلك بالاستناد إلى تعريف كثيرة الحدود الأصغرية.

يوضح المثال التالي المفاهيم التي قدمناها حتى الآن.

**مثـــال**

ليكن $V_1$ فضاء متجها بُعده 1 على $\mathbb{Q}$ وأساسه $\{v_1\}$ وليكن $\alpha_1$ هو التحويل الخطي الوحيد لـ $V_1$ الذي يرسل $v_1$ إلى $-v_1$. واضح أن $V_1$ حلقية دوروية على $\mathbb{Q}[x]$ بواسطة $\alpha_1$ وأن هذه الحلقية مولدة بالعنصر $v_1$ لأن $v_1$ يولد $V_1$. إن مرتبة $V_1$ هي $x + 1$ لأن $(x + 1)v_1 = \alpha_1(v_1) + v_1 = -v_1 + v_1 = 0$. ولأن أية كثيرة حدود غير صفرية لا ترسل $v_1$ إلى الصفر إذا كانت درجتها أقل من درجة $x + 1$.

ليكن $V_2$ فضاء متجها بعده 2 على $\mathbb{Q}$ وأساسه $\{v_2, v_3\}$، وليكن $\alpha_2$ هو التحويل الخطي لـ $V_2$ الذي مصفوفته بالنسبة إلى هذا الأساس هي

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

إذن، $\alpha_2(v_3) = 2v_3$ و $\alpha_2(v_2) = 2v_2 + v_3$. واضح أن $v_2$ و $\alpha_2(v_2)$ مستقلان خطيا على $\mathbb{Q}$ وبالتالي فإنهما يولدان $V_2$؛ إذن $V_2$ حلقية دوروية على $K[x]$ بواسطة $\alpha_2$ مولدة بالعنصر $v_2$. نلاحظ أن $(\alpha_2 - 2\mathrm{I})(v_2) = v_3$ و $(\alpha_2 - 2\mathrm{I})(v_3) = 0$، وبالتالي فإن $(x - 2)^2 v_2 = 0$. إذن $\min \alpha_2$ يقسم $(x - 2)^2$، وبما أن $\alpha - 2\mathrm{I} \neq 0$ فإنه ينتج أن $\min \alpha_2 = (x - 2)^2$، وبالتالي فإن $(x - 2)^2$ هي مرتبة $v_2$.

الآن، ليكن $V = V_1 \oplus V_2$. نستطيع أن ننظر إلى $V$ على أنه فضاء أساسه $\{v_1, v_2, v_3\}$. ليكن $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$. بالنسبة إلى هذا الأساس فإن مصفوفة $\alpha$ هي

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الآن، إذا نظرنا إلى $V$ على أنها حلقية على $\mathbb{Q}[x]$ بواسطة $\alpha$ فإن $V_1$ حلقية جزئية دوروية مرتبتها $x + 1$ مولدة بالعنصر $v_1$ وإن $V_2$ حلقية جزئية دوروية مرتبتها $(x - 2)^2$ مولدة بالعنصر $v_2$. بما أن $x + 1$ و $(x - 2)^2$ أوليتان نسبيا، فإننا بالاستناد إلى (٨-١٣) نجد أن $V$ دوروية من المرتبة $(x + 1)(x - 2)^2$ ومولدة بالعنصر $v = v_1 + v_2$. يستطيع القارئ بسهولة إثبات أن $v, \alpha(v), \alpha^2(v)$ تولد $V$. علاوة على ذلك، بالاستناد إلى (٨-١٠)، فإن $V$ هي المجموع المباشر لحلقية جزئية دوروية مرتبتها $x + 1$ مولدة بالعنصر $(x - 2)^2v$ ومن حلقية جزئية أخرى مرتبتها $(x - 2)^2$ مولدة بالعنصر $(x + 1)v$. وواضح أن $(x - 2)^2v = (x - 2)^2v_1 = (\alpha_1 - 2\mathrm{I})^2v_1 = 9v_1$ وأن $(x + 1)v = (x + 1)v_2 = \alpha_2(v_2) + v_2 = 3v_2 + v_3$. وواضح أن $9v_1$ مولد آخر لـ $V_1$، ويستطيع القارئ أن يرى بسهولة أن $3v_2 + v_3$ يولد $V_2$ - يجب أن يكون الوضع كذلك لأن $V_1$ و $V_2$ هما المركبتان الأوليتان لـ $V$، وبالتالي فإنهما وحيدتان، وذلك استنادا إلى (٨-١٠). إن فهما سليما لهذا المثال البسيط سوف يكون مفيدا جدا للقارئ في المرحلة القادمة.

## ٤ - المصفوفات الخاصة بالتحويلات الخطية الدوروية

الآن، سوف نبين أنه يمكن إعطاء مصفوفة التحويل الخطي الدوروي أشكالا بسيطة متنوعة وذلك عن طريق الاختيار الحكيم للأساس.

**(١٠-١١) مأخوذة**

*ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$، وافرض أن $\alpha$ دوروي مرتبته $f$. علاوة على ذلك، افرض أن $V \neq \{0\}$. لتكن $m = \partial f$ هي درجة $f$ وليكن $v$ مولدا لـ $V$ كحلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$. عندئذ، إن العناصر $v, \alpha(v), \dots, \alpha^{m-1}(v)$ تكون أساسا لـ $V$. وبوجه خاص إن $\partial f = \dim V$.*

**البرهـــــان**

بالطبع، لقد فرضنا أن $f$ واحدية. بما أن $V \neq \{0\}$، فإن $f \neq 1$ وبالتالي فإن $\partial f = m > 0$.

أولا، سنثبت أن $\{v, \alpha(v), ..., \alpha^{m-1}(v)\}$ مستقلة خطيا. لتكن $b_0, ..., b_{m-1}$ عناصر في $K$ بحيث $b_0 v + b_1 \alpha(v) + ... + b_{m-1} \alpha^{m-1}(v) = 0$. عندئذ، إن

$$(b_0 + b_1 x + ... + b_{m-1} x^{m-1})v = 0 .$$

إذن $f$ (أي مرتبة $v$) تقسم $b_0 + b_1 x + ... + b_{m-1} x^{m-1}$ ونلاحظ أن درجة كثيرة الحدود هذه هي أقل من أو تساوي $m - 1$. بما أن $\partial f = m > 0$ فإن كثيرة الحدود تلك هي كثيرة الحدود الصفرية. إذن $b_0 = ... = b_{m-1} = 0$.

الآن، سنثبت أن العناصر المعطاة تولد $V$. ليكن $u \in V$. بما أن $v$ يولد $V$ كحلقية على $K[x]$ فإنه يوجد $h \in K[x]$ بحيث $u = hv$. بالاستناد إلى خاصة القسمة الإقليدية، فإننا نستطيع أن نكتب $h = fq + r$ حيث $\partial r < \partial f$. عندئذ، إن

$$u = hv = (fq + r)v = qfv + rv = rv .$$

الآن، إن درجة $r$ أقل من أو تساوي $m - 1$، وبالتالي فإن $r$ تأخذ الشكل $r_0 + r_1 x + ... + r_{m-1} x^{m-1}$. إذن، فإن

$$u = rv = r_0 v + r_1 \alpha(v) + ... + r_{m-1} \alpha^{m-1}(v)$$

وبالتالي فإن $u$ تركيب خطي من العناصر $v, \alpha(v), ..., \alpha^{m-1}(v)$ على $K$. إن هذا ينهي برهان المأخوذة.

**(١١-١١) نتيجة**

*إذا استخدمنا الفرضيات الموجودة في (١١-١٠)، فإن مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى الأساس $\{v, \alpha(v), ..., \alpha^{m-1}(v)\}$ هي*

$$C(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{m-1} \end{bmatrix}$$

حيث $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + x^m$.

*وهكذا فعناصر $C(f)$ التي تقع أسفل القطر مباشرة تساوي 1 وعناصر العمود الأخير في $C(f)$ هي معاملات $f$ بعد حذف المعامل الأعلى وتغيير إشاراتها، وتساوي عناصر $C(f)$ المتبقية الصفر.*

**البرهـــان**

إذا كتبنا $v_i = \alpha^i(v)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, m-1$، فإن

$$\begin{aligned} \alpha(v_0) &= 0.v_0 + 1.v_1 + 0.v_2 + \ldots + 0.v_{m-1} \\ \alpha(v_1) &= 0.v_0 + 0.v_1 + 1.v_2 + \ldots + 0.v_{m-1} \\ &\vdots \\ \alpha(v_{m-2}) &= 0.v_0 + \ldots + 0.v_{m-2} + 1.v_{m-1} \end{aligned}$$

الآن، إن $\alpha(v_{m-1}) = \alpha^m(v) = -a_0 v - a_1\alpha(v) - \ldots - a_{m-1}\alpha^{m-1}(v)$ وذلك لأن $f(\alpha)(v) = 0$. إذن

$$\alpha(v_{m-1}) = -a_0 v_0 - a_1 v_1 - \ldots - a_{m-1} v_{m-1}$$

عندئذ، نحصل على النتيجة المطلوبة بالاستناد إلى تعريف مصفوفة التحويل الخطي بالنسبة إلى أساس معطى - انظر (1) في البند الأول من هذا الفصل.

**(١١-١٢) تعريف**

*إن المصفوفة $C(f)$ التي تعين بشكل وحيد بواسطة $f$ تسمى «المصفوفة الرفيقة» (companion matrix) لـ $f$. (لاحظ أن $C(f)$ معرفة فقط لكثيرات الحدود الواحدية غير الثابتة $f$).*

في الحالة التي تكون فيها $f$ قوة عنصر أولي، فإنه يوجد اختيار آخر للأساس بحيث يعطينا مصفوفة مختلفة لـ $\alpha$، ويعتبر هذا الاختيار مهما. سوف نناقش فقط ماذا يحدث عندما تكون درجة العنصر الأولي تساوي 1؛ وغالبا ما يحدث هذا في التطبيقات بسبب النتيجة التالية.

**(١١–١٣) مأخوذة**

*إن العناصر الأولية في $\mathbb{C}[x]$ هي بالضبط كثيرات الحدود التي تساوي درجتها 1.*

**البرهـــان**

لتكن $p$ كثيرة حدود أولية في $\mathbb{C}[x]$. عندئذ، بالاستناد إلى التعريف فإن $p$ ليست ثابتا، وبالتالي فإن $\partial(p) \geq 1$. إذن يوجد $a \in \mathbb{C}$ بحيث $a$ هو جذر لـ $p$ – بسبب الخواص المشهورة لحقل الأعداد المركبة (المبرهنة الأساسية في الجبر). إذن بالاستناد إلى (٣ – ١٠) فإن $(x-a)|p$. بما أن $p$ أولية (وبالتالي غير قابلة للتحليل) فإنه يجب أن يكون $p \sim x - a$، وبالتالي فإن درجة $p$ هي 1. ومن الناحية الأخرى، إن العكس واضح.

**ملاحظة**

من الممكن أن نستخدم هنا أي حقل مغلق جبريا بدلا من $\mathbb{C}$. نقول إن الحقل $K$ مغلق جبريا (algebraically closed) إذا كان يوجد جذر في $K$ لكل كثيرة حدود درجتها أكبر من أو تساوي 1 في $K[x]$.

**(١١–١٤) مأخوذة**

*ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا دورويا لـ $V$ مرتبته $(x - \lambda)^n$ حيث $\lambda \in K$ و $n > 0$. ليكن $v$ مولدا لـ $V$ كحلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$. عندئذ، إن*

$$\{v, (\alpha - \lambda I)(v), \ldots, (\alpha - \lambda I)^{n-1}(v)\}$$

*أساس لـ $V$. وتكون مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى هذا الأساس هي:*

$$J(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

حيث $J(\lambda, n)$ مصفوفة من النوع $n \times n$ بحيث عناصرها القطرية تساوي $\lambda$ وعناصرها التي تقع أسفل القطر مباشرة هي 1، وعناصرها الأخرى تساوي 0.

**البرهان**

سبق أن علمنا من (١١-١٠) أن $\dim V = n$؛ إذن يكفي إثبات أن $\{v, (\alpha - \lambda I)(v), \ldots, (\alpha - \lambda I)^{n-1}(v)\}$ مستقلة خطيا على $K$. نفرض النقيض ونختار العناصر $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$ بحيث يكون أحدها على الأقل مختلفا عن الصفر وبحيث

$$b_0 v + b_1(a - \lambda I)(v) + \ldots + b_{n-1}(a - \lambda I)^{n-1}(v) = 0$$

نختار $r$ بحيث $b_r \neq 0, b_{r+1} = \ldots = b_{n-1} = 0$. عندئذ، إن $gv = 0$ حيث $g = b_0 + b_1(x - \lambda) + \ldots + b_r(x - \lambda)^r$. علاوة على ذلك، إن $g \neq 0$ لأن معامل $x^r$ في $g$ هو $b_r \neq 0$. بما أن مرتبة $v$ هي $(x - \lambda)n$، فإن $(x - \lambda)^n \mid g$. ولكن $\partial g = r < n$. وبالتالي فإننا نحصل على تناقض. إذن $\{v, (\alpha - \lambda I)(v), \ldots, (\alpha - \lambda I)^{n-1}(v)\}$ مستقلة خطيا.

ليكن $v_j = (\alpha - \lambda I)^j(v)$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-1$. عندئذ، إن

$$\alpha(v_j) = (\alpha - \lambda I)(v_j) + \lambda v_j = v_{j+1} + \lambda v_j \quad \text{لكل } 0 \leq j < n-1$$

وإن

$$.\ \alpha(v_{n-1}) = (\alpha - \lambda I)(v_{n-1}) + \lambda v_{n-1} = (\alpha - \lambda I)^n(v) + \lambda v_{n-1} = \lambda v_{n-1}$$

وهكذا، فإن:

$$\begin{aligned}
\alpha(v_0) &= \lambda v_0 + v_1 \\
\alpha(v_1) &= \lambda v_1 + v_2 \\
&\vdots \qquad \ddots \\
\alpha(v_{n-2}) &= \lambda v_{n-2} + v_{n-1} \\
\alpha(v_{n-1}) &= \lambda v_{n-1} ,
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى $\{v_0, ..., v_{n-1}\}$ هي المصفوفة المكتوبة أعلاه.

**(١١-١٥) تعريف**

*تسمى كل مصفوفة من الشكل $J(\lambda, n)$ «مصفوفة جوردانية ابتدائية من النوع $\lambda$» (elementary Jordan $\lambda$-matrix)، وأحيانا تسمى «مصفوفة جوردانية ابتدائية».*
*إن $J(\lambda, n)$ هي المصفوفة الجوردانية الابتدائية المصاحبة لكثيرة الحدود $(x - \lambda)^n$.*

## ٥ - الأشكال القانونية

الآن، نحن على استعداد لتقديم بعض الإجابات التي تتعلق بالمسائل التي طُرِحَت في بداية الفصل.

**(١١-١٦) مبرهنة**

*ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$. عندئذ، يوجد أساس $v$ لـ $V$ بحيث*

$$M(\alpha, v) = C(d_1) \oplus ... \oplus C(d_s)$$

*حيث $C(d_i)$ هي المصفوفة الرفيقة لكثيرة حدود واحدية غير ثابتة $d_i$ وحيث $d_1 | \cdots | d_s$.*

*إن كثيرات الحدود الواحدية المذكورة أعلاه معينة بشكل وحيد بواسطة $\alpha$.*

*وإذن، توجد القطاعات $C(d_1), ..., C(d_s)$ في المصفوفة $M(\alpha, v)$ بشكل متسلسل على قطرها. إن النص المتعلق بالوحدانية، يفيد بأنه إذا كان $u$ أساسا لـ $V$ بحيث $M(\alpha, u) = C(g_1) \oplus ... \oplus C(g_r)$، حيث $g_1, ..., g_r$ كثيرات حدود واحدية غير ثابتة بحيث $g_1 | \cdots | g_r$، فإن $r = s$ و $d_i = g_i$ لكل $i = 1, ..., s$. لاحظ أنه بالرغم*

*من أننا ندعي أن شكل المصفوفة وحيد، فإننا لا ندعي أنه يوجد أساس وحيد لـ $V$ بحيث تكون المصفوفة بالنسبة له من ذلك الشكل.*

**البرهـــان**

بالاستناد إلى (١١-٧)، فإن $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_s$ حيث $\alpha_i$ تحويل خطي دوروي مرتبته $d_i$ مؤثر في فضاء جزئي $V_i$ من $V$ و $d_s \mid \cdots \mid d_1$ . عندئذ، فإن $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ وإن $\alpha_i = \alpha\big|_{V_i}$ . و بالاستناد إلى (١١-١١)، فإنه يوجد أساس $v^{(i)}$ لـ $V_i$ بحيث $M(\alpha_i, v^{(i)}) = C(d_i)$ حيث $C(d_i)$ هي المصفوفة الرفيقة لـ $d_i$. بالاستناد إلى (١١-٢)، فإن مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى $v = \bigcup_{i=1}^{s} v^{(i)}$ هي المجموع القطري للمصفوفات $M(\alpha_i, v^{(i)})$، وبصورة أخرى $C(d_1) \oplus \ldots \oplus C(d_s)$ .

الآن، إذا كان $M(\alpha, u) = C(g_1) \oplus \ldots \oplus C(g_r)$ لأساس آخر $u$ لـ $V$، فإن $V$ يتفرق، كما في (١١-٢)، إلى الشكل $U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ وإن $\alpha$ يتفرق إلى الشكل $\alpha = \beta_1 \oplus \ldots \oplus \beta_r$ حيث $\beta_i = \alpha\big|_{U_i}$ وحيث $C(g_i)$ هي مصفوفة $\beta_i$ بالنسبة إلى أساس مناسب لـ $U_i$ . وإذا عكسنا حجة (١١-١١)، فإننا نجد أن $U_i$ دوروية مرتبتها $g_i$ (كحلقية على $K[x]$) مولدة بالعنصر الأول في الأساس المتكلم عنه. إذن، $\beta_i$ دوروي مرتبته $g_i$، وينتج من (١١-٧) (أو من (٨-٥) مباشرة) أن $r = s$ وأن $d_i = g_i$ لكل $i = 1, \ldots, s$.

كما شرحنا في مطلع هذا الفصل فإنه لكل مبرهنة متعلقة باختيار مصفوفات التحويلات الخطية توجد مبرهنة مكافئة متعلقة بتشابه المصفوفات. وفي حالة المبرهنة (١١-١٦) فإن المبرهنة المصاحبة هي النتيجة التالية.

**(١١-١٧) مبرهنة**

*إذا كانت $A$ مصفوفة من النوع $n \times n$ على $K$، فإن $A$ تشابه (على $K$) مصفوفة وحيدة $C(d_1) \oplus \ldots \oplus C(d_s)$ من النوع $n \times n$ حيث $C(d_i)$ هي المصفوفة الرفيقة لكثيرة حدود واحدية غير ثابتة $d_i$ وحيث $d_s \mid \cdots \mid d_1$ .*

**(١١-١٨) تعريف**

تسمى *المصفوفة الموصوفة في (١١-١٦) «المصفوفة القانونية النسبية»* (rational canonical matrix) لـ $\alpha$ . تسمى *المصفوفة الموصوفة في (١١-١٧) «الشكل القانوني النسبي»* (rational canonical form) لـ $A$ .

**ملاحظات**

١ - نستخدم المصطلح «نسبي» للدلالةعلى شيء يعتمد فقط على «العمليات النسبية» التي تعني الجمع، الضرب، الطرح والقسمة، وبالتالي فإنه يمكن إجراء هذه العمليات داخل أي حقل.

٢ - في كل فصل من فصول تشابه المصفوفات من النوع $n \times n$ على $K$ ، توجد بالضبط مصفوفة واحدة من الشكل $C(d_1) \oplus \dots \oplus C(d_s)$ - وتلك هي قوة المصطلح «الشكل القانوني». ومن أجل أن نقرر فيما إذا كانت مصفوفتان متشابهتين أم لا، فإننا ببساطة نحسب الشكلين القانونيين لهما ونقارنهما من زاوية المساواة والاختلاف. إذن، يوجد تقابل واحد لواحد بين فصول التكافؤ للمصفوفات من النوع $n \times n$ على $K$ بالنسبة إلى التشابه والمتتاليات $d_1, \dots, d_s$ المكونة من كثيرات حدود واحدية غير ثابتة على $K$ التي تحقق

$$\text{(i)} \quad d_1 \mid \cdots \mid d_s \qquad \text{و} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{s} \partial\, d_i = n$$

٣ - إذا مددنا فكرة التشابه إلى الحلقة $\mathrm{End}_K V$ عن طريق التماثل $\mathrm{End}_K V \cong M_n(K)$ أو عن طريق مكافئ آخر حيث نقول إن $\alpha$ يشابه $\alpha'$ إذا كان يوجد تماثل ذاتي $\beta$ لـ $V$ بحيث $\alpha' = \beta^{-1}\alpha\beta$ ، فإننا نحصل على تصنيف مشابه لفصول تشابه $\mathrm{End}_K V$.

الآن، سنحصل على الشكل القانوني النسبي الأولي من تفريق الحلقية إلى مجموع مباشر لحلقيات دوروية أولية.

**(١١-١٩) مبرهنة**

*ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$. عندئذ، يوجد أساس $v$ لـ $V$ بحيث*

$$M(\alpha, v) = C(g_1) \oplus \dots \oplus C(g_r)$$

*حيث كل $g_i$ قوة $q_i^{s_i}$ $(s_i > 0)$ لكثيرة حدود أولية واحدية $q_i$.*

*إن القوى $g_1, \dots, g_r$ المكتوبة أعلاه معينة بشكل وحيد بواسطة $\alpha$ وذلك تحت سقف الترتيب الذي تظهر به تلك القوى.*

في حالة المصفوفات، يكون النص المقابل هو المبرهنة التالية.

**(١١-٢٠) مبرهنة**

*إذا كانت $A$ مصفوفة من النوع $n \times n$ على $K$، فإن $A$ تشابه (على $K$) مصفوفة من النوع $n \times n$ ومن الشكل $C(g_1) \oplus \dots \oplus C(g_r)$ حيث كل $g_i$ قوة $q_i^{s_i}$ $(s_i > 0)$ لكثيرة حدود أولية واحدية $q_i$. إن هذه المصفوفة معينة بشكل وحيد تحت سقف ترتيب القطاعات $C(g_i)$ على القطر.*

**إثبات المبرهنة (١١-١٩)**

يُنجز هذا البرهان بنفس الطريقة المتبعة في (١١-١٦). بالاستناد إلى (١١-٨) فإن $\alpha = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_r$ حيث كل $\alpha_i$ هو تحويل خطي دوروي مرتبته قوة غير تافهة لكثيرة حدود أولية واحدية، وبعد ذلك نتبع الطريقة السابقة.

إذا بدلنا عناصر الأساس $v$ في (١١-١٩)، فإننا نستطيع أن نرتب الأمور بحيث نجمع على القطر معا المصفوفات الرفيقة المقابلة للقوى $q^s$ التي هي قوى لنفس كثيرة الحدود الأولية $q$، ثم نرتب هذه المصفوفات وفقا لتزايد $s$ (وبالتالي وفقا لتزايد السعة). ولكن بوجه عام لا توجد طريقة لتحديد الترتيب الذي تظهر به القطاعات المجمعة المقابلة لكثيرات حدود أولية مختلفة.

**(١١-٢١) تعريف**

*إذا رتبنا القطاعات القطرية في مصفوفة (١١-١٩)، كما وصفنا أعلاه، فإننا نسمي تلك المصفوفة «**مصفوفة نسبية أولية**» (primary rational matrix) لـ $\alpha$. وإذا*

رتبنا القطاعات القطرية في مصفوفة (١١-٢٠)، بشكل مشابه، فإننا نسمي تلك المصفوفة «**شكلا قانونيا نسبيا أوليا**» (*primary rational canonical form*) لـ A . وغالبا ما نسمي قوى العناصر الأولية المستخدمة «**القواسم الابتدائية**» (*elementary divisors*) لـ $\alpha$ (أو لـ A). إذن، القواسم الابتدائية لـ $\alpha$ هي اللامتغيرات الأولية للحلقية المصاحبة لـ $\alpha$ على $K[x]$. وينتج من المبرهنات المذكورة أعلاه، أن مصفوفتين من النوع $n \times n$ على $K$ (أو تحويلين خطيين لـ $V$) تتشابهان، إذا وفقط إذا كان لهما نفس مجموعة القواسم الابتدائية.

أخيرا، نصل إلى الشكل القانوني الجورداني. إن هذا ليس شكلا نسبيا، لأن وجوده يعتمد على القدرة على حل معادلات كثيرات الحدود، وبوجه عام، لا يمكن حل هذه المعادلات عن طريق العمليات النسبية. من ناحية أخرى، يمكن دائما حل هذه المعادلات على حقل مغلق جبريا مثل $\mathbb{C}$.

**(١١-٢٢) مبرهنة**

*ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لفضاء $V$ بعده $n$ على حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. عندئذ، يوجد أساس $v$ لـ $V$ بحيث:*

$$M(\alpha, v) = J(\lambda_1, n_1) \oplus \ldots \oplus J(\lambda_r, n_r)$$

*حيث كل $J(\lambda_i, n_i)$ مصفوفة جوردان الابتدائية لقوة عنصر أولي $(x - \lambda_i)^{n_i}$ $(n_i > 0)$.*

*إذا كانت مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى أساس ما لـ $V$ هي المجموع القطري لمصفوفات جوردانية ابتدائية، فإن هذه المصفوفات هي المصفوفات المذكورة أعلاه مأخوذة بترتيب ما.*

**البرهـــــان**

بالاستناد إلى (١١-٨)، فإن $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_r$ حيث كل $\alpha_i$ تحويل خطي دوروي لفضاء جزئي $V_i$ من $V$ ومرتبة $\alpha_i$ قوة $q_i^{n_i}$ $(n_i > 0)$ لكثيرة حدود أولية واحدية $q_i$. عندئذ، فإن $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ و $\alpha_i = \alpha|_{V_i}$. الآن، بما أننا نعمل على الحقل $\mathbb{C}$

فإن المأخوذة (١١-١٣) تخبرنا أن $q_i$ خطية، وبالتالي فإن $q_i$ تكون من الشكل $x - \lambda_i$ لعنصر ما $\lambda_i \in \mathbb{C}$. بالاستناد إلى (١١-١٤) فإنه يوجد أساس $v^{(i)}$ لـ $V_i$ بحيث $M(\alpha, v^{(i)}) = J(\lambda_i, n_i)$، وبالتالي فإنه إذا كان $v = \bigcup_{i=1}^{k} v^{(i)}$، فإن (١١-٢) تعطينا $M(\alpha, v) = J(\lambda_1, n_1) \oplus \dots \oplus J(\lambda_r, n_r)$. لاحظ أن تفريق $V$ المستخدم هنا، هو نفس التفريق الذي يعطينا مصفوفة $\alpha$ النسبية الأولية ؛ ونحصل على المصفوفة الحالية عن طريق اختيار أساسات مختلفة في مركبات $V$.

إن برهان النص المتعلق بالوحدانية يتم بالطريقة المعتادة. إذا كانت $M(\alpha, u)$ مجموعا قطريا لمصفوفات جوردانية ابتدائية بالنسبة إلى أساس ما $u$، فإن $\alpha$ يتفرق كمجموع مباشر لتحويلات خطية دوروية مراتبها قوى عناصر أولية، وهذه القوى تصاحب هذه المصفوفات الجوردانية. عندئذ، ينتج من (١١-٨) أن مجموعة قوى العناصر الأولية المذكورة هي نفس المجموعة الموجودة مع التفريق الأصلي، وهذا هو المطلوب.

كما هو معتاد، فإن هناك نتيجة مشابهة تتعلق بالمصفوفات.

**(١١-٢٣) مبرهنة**

*كل مصفوفة من النوع $n \times n$ على $\mathbb{C}$ تشابه (على $\mathbb{C}$) مجموعا قطريا لمصفوفات جوردانية ابتدائية. إن المصفوفات الجوردانية الابتدائية الموجودة في هذا المجموع القطري معينة بشكل وحيد تحت سقف الترتيب الذي تظهر به.*

إذا بدّلنا عناصر الأساس $v$ في (١١-٢٢) عند الضرورة، فإننا نستطيع أن نرتب الأمور بحيث نجمع معا القطاعات $J(\lambda, l)$ المقابلة لقيمة معطاة لـ $\lambda$، ثم نرتبها على القطر وفقا لتزايد السعة. إذن، إذا كانت $\mu_1, \dots, \mu_k$ هي قيم $\lambda$ المختلفة الموجودة فإن

$$M(\alpha, v) = J_1 \oplus \dots \oplus J_k$$

حيث $J_i = J(\mu_i, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(\mu_i, n_{i,s_i})$ و $n_{i1} \le n_{i2} \le \cdots \le n_{i,s_i}$. بما أن الحقل $\mathbb{C}$ غير مرتب، فإنه لا توجد طريقة طبيعية لتحديد الترتيب الذي تظهر به المصفوفات

$J_i$. إن المصفوفات $J_i$ تقابل تفريق $V$ كحلقية على $K[x]$ إلى مركباتها الأولية، ويقابل التفريق الإضافي للمصفوفات $J_i$ تفريق كل مركبة أولية لـ$V$ إلى مجموع مباشر لحلقيات جزئية دوروية أولية.

**(١١-٢٤) تعاريف**

*المصفوفة الجوردانية من النوع $\lambda$ (Jordan $\lambda$-matrix) مجموع قطري لمصفوفات جوردانية ابتدائية من النوع $\lambda$ لقيمة واحدة لـ $\lambda$، مرتب وفقا لتزايد السعة. و المصفوفة الجوردانية (Jordan matrix) مجموع قطري لمصفوفات جوردانية من النوع $\lambda$ حيث تكون قيم $\lambda$ مختلفة. بالاستناد إلى (١١-٢٢)، فإنه يمكن تمثيل كل تحويل خطي $\alpha$ لفضاء متجه ذي بعد منته $n > 0$ على $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى أساس مناسب، بمصفوفة جوردانية. إن مثل هذه المصفوفة تسمى مصفوفة قانونية جوردانية (Jordan canonical matrix) لـ $\alpha$. تسمى كل مصفوفة جوردانية مشابهة لمصفوفة معطاة $A$ من النوع $n \times n$ على $\mathbb{C}$ شكلا قانونيا جوردانيا (Jordan canonical form) (وللإيجاز نكتب JCF) لـ $A$. وكما سبق أن شرحنا، فإن $A$ تعين هذا الشكل القانوني بشكل وحيد تحت سقف الترتيب الذي تظهر به القطاعات الجوردانية من النوع $\lambda$ على القطر.*

**ملاحظات**

١ - بالرغم من أننا قد طورنا نظرية الأشكال القانونية الجوردانية على $\mathbb{C}$ فإن نفس النتائج تتحقق على أي حقل مغلق جبريا.

٢ - إن النتائج التي حصلنا عليها حتى الآن نتائج غير إنشائية لأنها لا تعطينا أية فكرة عن الطريقة العملية لحساب الأشكال القانونية لمصفوفة معطاة، أو لتحويل خطي معطى. سوف نعود لمناقشة هذه المسألة في الفصل التالي حيث نكمل هذا النقص.

## ٦ - كثيرات الحدود الأصغرية وكثيرات الحدود المميزة

سبق أن ذكرنا بتعريف كثيرة الحدود الأصغرية لتحويل خطي في البند الثالث. وبطريقة مشابهة، يمكن تعريف كثيرة الحدود الأصغرية لمصفوفة؛ إذا كان $\alpha$ تحويلا

خطيا لـ $V$، وكان $v$ أساسا ما لـ $V$ وكانت $M(\alpha, v) = A$، فإن $\alpha$ و $A$ لهما نفس كثيرة الحدود الأصغرية لأنه لأي $g \in K[x]$، فإن $g(A) = M(g(\alpha), v)$. وهناك كثيرة حدود مهمة أخرى مصاحبة للمصفوفة المربعة، وهي كثيرة الحدود المميزة.

**(١١-٢٥) تعريف**

*إن كثيرة الحدود المميزة (characteristic polynomial) لمصفوفة مربعة $A$ على $K$ هي العنصر $\det(x1_n - A)$ الذي ينتمي إلى $K[x]$ ؛ ويرمز لها بالرمز $\mathrm{ch}\,A$.*

لتكن $A$ و $\alpha$ كما هو مذكور آنفا. عندئذ، إذا كان $u$ أساسا آخر لـ $V$، فإنه توجد مصفوفة قابلة للانعكاس $X \in M_n(K)$ بحيث $M(\alpha, u) = X^{-1}AX$. الآن

$$\begin{aligned}\det(x1_n - X^{-1}AX) &= \det(X^{-1}(x1_n - A)X)\\ &= \det(X)^{-1}\det(x1_n - A)\det X\\ &= \det(x1_n - A) = \mathrm{ch}\,A\end{aligned}$$

بكلمات أخرى، إن المصفوفات التي تمثل نفس التحويل الخطي $\alpha$ بالنسبة إلى أساسات مختلفة، يكون لها نفس كثيرة الحدود المميزة. نعرف كثيرة الحدود هذه على أنها كثيرة الحدود المميزة $ch\,\alpha$ لـ $\alpha$.

الآن، سنبحث كيف تدخل كثيرة الحدود الأصغرية وكثيرة الحدود المميزة بشكل مناسب ضمن إطار هذا الفصل.

**(١١-٢٦) مأخوذة**

*ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$، ولتكن $C(d_1) \oplus \ldots \oplus C(d_s)$ هي المصفوفة القانونية النسبية لـ $\alpha$. عندئذ، فإن*

(i) $\min\alpha = d_s$ و (ii) $\mathrm{ch}\,\alpha = d_1 \ldots d_s$

**البرهــــان**

(i) إن أكثر ما يناسبنا هنا هو أن نفكر بلغة الحلقيات. لدينا $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ كحلقية على $K[x]$ حيث $V_i$ دوروية مرتبتها $d_i$. بما أن $d_i \mid d_s$، فإن $d_sV_i = \{0\}$

لكل $1 \leq i \leq s$ وبالتالي فإن $d_s V = \{0\}$. إذن $d_s(\alpha) = 0$ و $g \mid d_s$ حيث $g = \min \alpha$. من الناحية الأخرى، فإن $g(\alpha) = 0$، وبالتالي فإن $g(\alpha)V_s = gV_s = \{0\}$. إذن $d_s \mid g$. إذن $g \sim d_s$، وبما أن كلا من $d_s$ و $g$ واحدية فإنه ينتج أن $g = d_s$.

(ii) لتكن $A = C(d_1) \oplus \ldots \oplus C(d_s)$. عندئذ، من التعريف ينتج أن $\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}A$.
الآن $x1_n - A = \left(x1_{n_1} - C(d_1)\right) \oplus \cdots \oplus \left(x1_{n_s} - C(d_s)\right)$ (حيث $n_i$ درجة $d_i$)، وبالتالي فإن

$$\operatorname{ch}A = \det\left(x1_n - A\right) = \det\left(x1_{n_1} - C(d_1)\right) \ldots \det\left(x1_{n_s} - C(d_s)\right)$$
$$= \operatorname{ch}C(d_1) \ldots \operatorname{ch}C(d_s)$$

إذا كان $d = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1} + x^r$، فإن

$$\det\left(x1_r - C(d)\right) = \det\begin{bmatrix} x & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdot & \cdot & a_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdot & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & x & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & -1 & (x + a_{r-1}) \end{bmatrix}$$

نستخدم الاستقراء الرياضي على $r$ لنثبت أن $\operatorname{ch}C(d) = d$. إذا كان $r = 1$ فإن المحدد المكتوب أعلاه يساوي $x + a_0$ كما هو منصوص. إذا كان $r > 1$، فإننا نفك المحدد عن طريق الصف الأعلى ونحصل على:

$$\operatorname{ch}C(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1} + x^r) =$$
$$x \operatorname{ch}C(a_1 + a_2 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-2} + x^{r-1}) + a_0$$

وبالتالي فإننا نحصل على النتيجة عن طريق الاستقراء.

إذن نحصل على $\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}A = \operatorname{ch}C(d_1) \ldots \operatorname{ch}C(d_s) = d_1 \ldots d_s$ كما هو منصوص.

**(١١-٢٧) مأخوذة**

*ليكن $V$ فضاء متجها على $\mathbb{C}$ وليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$. لتكن $J_1 \oplus \ldots \oplus J_k$ مصفوفة قانونية جوردانية لـ $\alpha$ حيث*

$$J_i = J(\lambda_i, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_i, n_{i,s_i})$$

*و $n_{i1} \le n_{i2} \le \cdots \le n_{i,s_i}$ وجميع العناصر $\lambda_i$ مختلفة. عندئذ، إن*

(i) $\operatorname{ch}\alpha = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$ حيث $m_i = \sum_j n_{ij}$ و

(ii) $\min\alpha = (x-\lambda_1)^{n_{1,s_1}}\cdots(x-\lambda_k)^{n_{k,s_k}}$

**البرهـــان**

(i) لتكن $B = J_1 \oplus \ldots \oplus J_k$. إذن بالاستناد إلى الحجة المعطاة أعلاه، فإن $\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}B = \prod_{i,j}\operatorname{ch}J(\lambda_i, n_{ij})$. الآن

$$\operatorname{ch}J(\lambda, r) = \det\begin{bmatrix} x-\lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & x-\lambda & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & x-\lambda & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & x-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & -1 & x-\lambda \end{bmatrix} = (x-\lambda)^r$$

وبالتالي، فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة.

(ii) كما قلنا في السابق، إن كثيرات الحدود $(x-\lambda_i)^{n_{ij}}$ هي اللامتغيرات الأولية لـ $V$ كحلقية على $K[x]$ مصاحبة لـ $\alpha$. بالاستناد إلى (١١-٢٦) فإن $\min\alpha$ هي لامتغير الفتل الأعلى لـ $V$، ونحصل عليه كما يلي: لكل كثيرة حدود أولية نختار القوة العليا التي تظهر باعتبارها لامتغيرا أوليا ثم نكون حاصل ضرب هذه القوى لنحصل على المطلوب. (لقد استخدمت طريقة مشابهة في المثال المحلول في نهاية البند الثالث من الفصل العاشر).

إذن، إن القوة الكلية التي تظهر بها $(x - \lambda)$ في $\mathrm{ch}\,\alpha$ تعطي سعة القطاع الجورداني الكلي من النوع $\lambda$ في مصفوفة جوردانية لـ $\alpha$، وإن القوة التي تظهر بها $(x - \lambda)$ في $\min \alpha$ تعطي سعة أكبر مصفوفة ابتدائية في القطاع الجورداني من النوع $\lambda$.

**(١١-٢٨) نتيجة**

*لكل تحويل خطي $\alpha$ ولكل مصفوفة مربعة $A$، فإن $\min \alpha | \mathrm{ch}\,\alpha$ وإن $\min A | \mathrm{ch} A$.*

إن هذه نتيجة مباشرة للمأخوذة (١١-٢٦)، وهي مبرهنة كيلي - هاملتون المشهورة بالنص التالي: كل مصفوفة تحقق كثيرة الحدود المميزة لها.

**(١١-٢٩) نتيجة**

*لكل تحويل خطي $\alpha$ فإن $\min \alpha$ و $\mathrm{ch}\,\alpha$ يكون لهما نفس مجموعة العوامل غير القابلة للتحليل.*

**البرهــان**

بما أن $\min \alpha | \mathrm{ch}\,\alpha$ فإن كل عامل غير قابل للتحليل لـ $\min \alpha$ عامل غير قابل للتحليل لـ $\mathrm{ch}\alpha$. من الناحية الأخرى، إذا استخدمنا الترميز الموجود في (١١-٢٦) فإن $\mathrm{ch}\,\alpha = d_1 \ldots d_s$ يقسم $(d_s)^s = (\min \alpha)^s$. إذن كل عامل غير قابل للتحليل لـ $\mathrm{ch}\,\alpha$ عامل لـ $(\min \alpha)^s$ وبالتالي هو عامل لـ $\min \alpha$.

**(١١-٣٠) نتيجة**

*إذا كان $\alpha$ تحويلا خطيا ممثلا بالمصفوفة الجوردانية $J$، فإن العناصر القطرية في $J$ هي بالضبط جذور $\mathrm{ch}\,\alpha$.*

إن هذه نتيجة مباشرة للمأخوذة (١١-٢٧). إن جذور $\mathrm{ch}\,\alpha$ هي «الجذور المميزة» أو «القيم الذاتية» لـ $\alpha$؛ ولا شك أن القارئ مُلِمٌّ بهذه المفاهيم من خلال دراسته السابقة.

**أمثلة محلولة**

١ - في حالة المصفوفات من النوع $3 \times 3$ على حقل الأعداد المركبة، أثبت أنه يمكن استنتاج الشكل $JCF$ فورا إذا عرفنا $\min A$ و $\operatorname{ch} A$.

في حالة المصفوفات من النوع $3 \times 3$، إن معرفة سعة كل قطاع من النوع $\lambda$ وسعة القطاع الابتدائي الأكبر تكفي لتعيين الشكل $JCF$، وبالاستناد إلى نتيجة المأخوذة (١١-٢٧)، فإنه يمكن استنتاج هذه المعلومات من $\operatorname{ch} A$ و $\min A$. نستطيع أن نحسب $\operatorname{ch} A$ مباشرة ثم نعين $\min A$ عن طريق اختبار كثيرات الحدود التي تحقق ما يلي:

(i) تقسم $\operatorname{ch} A$ (١١-٢٨) و

(ii) تقبل القسمة على العوامل الخطية المختلفة لـ $\operatorname{ch} A$ (١١-٢٩).

ليكن $\operatorname{ch} A = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$. نعتبر ثلاث إمكانيات مختلفة ونضع في قائمة الأشكال $JCF$ في كل حالة.

**الحالة الأولى:** جميع القيم $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ مختلفة.

$$\min A = (x - \lambda_1)\,(x - \lambda_2)\,(x - \lambda_3) \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

**الحالة الثانية:** $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. عندئذ، فإن $\operatorname{ch} A = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)^2$ وتوجد إمكانيتان:

$$\min A = (x - \lambda_1)\,(x - \lambda_2) \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\min A = (x - \lambda_1)\,(x - \lambda_2)^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

**الحالة الثالثة:** $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$. عندئذ، فإن $\operatorname{ch} A = (x-\lambda_1)^3$. في هذه الحالة توجد ثلاثة اختيارات ممكنة لـ $\min A$ وكل اختيار يؤدي إلى شكل $JCF$ مختلف.

$$\min A = x-\lambda_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\min A = (x-\lambda_1)^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\min A = (x-\lambda_1)^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

الآن، نحسب الشكل $JCF$ للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وذلك كمثال توضيحي. نجد بسهولة أن

$$\operatorname{ch} A = \det \begin{bmatrix} x & -1 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 \\ 1 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$$

$$= x\,(x-2)^2 + (x-2) = (x-2)(x-1)^2$$

(إن تحليل كثيرات الحدود المميزة إلى عوامل ليس دائما بهذه السهولة). إذن، إننا في الحالة الثانية. عن طريق الحساب المباشر، نجد أن $(A-2\,1_3)(A-1_3) \neq 0$ وبالتالي فإن $\min A = (x-2)(x-1)^2$. إذن الشكل $JCF$ هو

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٢ - لتكن $A$ مصفوفة مربعة على $\mathbb{C}$، وافرض أن:

$\operatorname{ch} A = (x+1)^4(x+2)^3(x-2)^4$ وأن $\min A = (x+1)^3(x+2)(x-2)^2$

اكتب جميع إمكانيات الأشكال $JCF$ للمصفوفة $A$، واكتب مع كل شكل ممكن الشكل القانوني النسبي، والشكل القانوني النسبي الأولي. (غالبا ما نتكلم عن «الشكل» $JCF$ لمصفوفة بالرغم من أن هذا ليس صحيحا فعليا؛ أي أن هذا الكلام ليس دقيقا).

في أثناء الحل، سنستخدم الحقيقتين التاليتين: (i) إن القوة التي تظهر بها $(x-\lambda)$ في $\operatorname{ch} A$ هي سعة القطاع من النوع $\lambda$ في الشكل $JCF$ للمصفوفة $A$؛ (ii) إن القوة التي تظهر بها $(x-\lambda)$ في $\min A$ هي سعة أكبر قطاع ابتدائي من النوع $\lambda$ في الشكل $JCF$.

إذن، في الشكل $JCF$ للمصفوفة المعطاة $A$، تكون سعة القطاع الذي من النوع $-1$ هي $4 \times 4$، وهو يحتوي على قطاع جورداني ابتدائي سعته $3 \times 3$. إذن، يجب أن يكون المجموع القطري لمصفوفة جوردانية ابتدائية سعتها $1 \times 1$، ومصفوفة جوردانية ابتدائية سعتها $3 \times 3$؛ أي يجب أن يكون

$$[-1] \oplus \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

بالمثل، إن القطاع الذي من النوع $-2$ هو $[-2] \oplus [-2] \oplus [-2]$. وسعة القطاع الذي من النوع 2 هي $4 \times 4$، وهو يحتوي على قطاع ابتدائي سعته $2 \times 2$. توجد إمكانيتان:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[2] \oplus [2] \oplus \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

وهذا يعطي إمكانيتين للشكل $JCF$ للمصفوفة $A$، ونحصل عليهما عن طريق تكوين المجموع القطري للقطاع الذي من النوع 1− والقطاع الذي من النوع 2−، وقطاع من القطاعات التي من النوع 2. ونتجاهل الإمكانية التافهة لتبديل هذه القطاعات على القطر.

ليكن $V$ فضاء متجها بُعده 11 على $\mathbb{C}$. نختار أساسا لـ $V$، وليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$ بحيث تكون مصفوفته بالنسبة إلى هذا الأساس $A$. عندئذ نجعل $V$ حلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$ بالطريقة المعتادة. ويقابل كل قطاع جورداني ابتدائي من النوع $\lambda$ سعته $r \times r$ مركبة أولية دوروية من النوع $(x - \lambda)$ مرتبتها $(x - \lambda)^r$ (فضاء جزئيا بُعده $r$) في تفريق لـ $V$ كمجموع مباشر لحلقيات جزئية دوروية أولية. إذن، تكون اللامتغيرات الأولية لـ $V$ في الحالتين هي:

**الحالة الأولى**: $\{x + 1, (x + 1)^3, x + 2, x + 2, x + 2, (x - 2)^2, (x - 2)^2\}$

**الحالة الثانية**: $\{x + 1, (x + 1)^3, x + 2, x + 2, x + 2, x - 2, x - 2, (x - 2)^2\}$

عندئذ، نحصل على لامتغيرات الفتل بنفس الطريقة المتبعة في المثال المحلول في نهاية البند الثالث من الفصل العاشر؛ ونحصل على لامتغير الفتل الأعلى كما يلي: لكل كثيرة حدود أولية $(x - \lambda)$ نختار القوة العليا التي تظهر بها بمثابة لامتغير أولي، ثم نكون حاصل ضرب هذه القوى، وهلم جرا. إذن، تكون متتاليات لامتغيرات الفتل هي:

**الحالة الأولى**: $x + 2, (x + 1)(x + 2)(x - 2)^2, (x + 1)^3(x + 2)(x - 2)^2$

(أي $x + 2, x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8, x^6 + x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 10x^2 + 20x + 8$)

**الحالة الثانية**: $(x + 2)(x - 2), (x + 1)(x + 2)(x - 2), (x + 1)^3 (x + 2)(x - 2)^2$

(أي $x^2 - 4, x^3 + x^2 - 4x - 4, x^6 + x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 10x^2 + 20x + 8$)

إن الشكل القانوني النسبي الأولي، هو المجموع القطري للمصفوفات الرفيقة للامتغيرات الأولية (من مرتبة مناسبة)، والشكل القانوني النسبي هو

المجموع القطري للمصفوفات الرفيقة للامتغيرات الفتل، وفي هذه الحالة تكون المرتبة معينة بشكل وحيد. إذن، نحصل على الأشكال القانونية التالية:

**الحالةالأولى**: إن الشكل النسبي الأولي هو

$$[-1] \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \oplus [-2] \oplus [-2] \oplus [-2] \oplus \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

وإن الشكل النسبي هو

$$[-2] \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**الحالة الثانية**: نترك هذه الحالة كتمرين للقارئ.

## تمارين على الفصل الحادي عشر

١ - أوجد مصفوفتين من النوع $4 \times 4$ على $\mathbb{C}$ بحيث يكون لهما نفس كثيرة الحدود المميزة ونفس كثيرة الحدود الأصغرية ولكنهما غير متشابهتين.

٢ - لتكن $A$ مصفوفة على $\mathbb{C}$ بحيث $\text{ch } A = (x+1)^6 (x-2)^3$ و $\min A = (x+1)^3(x-2)^2$. اكتب جميع أشكال $JCF$ الممكنة لـ $A$، وفي كل حالة اكتب الشكل القانوني النسبي المقابل والشكل القانوني النسبي الأولي المقابل. إفعل نفس الشيء لـ $\text{ch} A = (x+1)^7(x-1)^4(x+2)$ و $\min A = (x+1)^3(x-1)^2(x+2)$

٣ - أوجد الأشكال القانونية المختلفة (على $\mathbb{C}$) للمصفوفة

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(لاحظ أنه يمكن بالتأكيد حل (أ) و (ب) بالطرق التي سبق أن طورناها، ولاحظ أنه يمكن حل (جـ) و (د) لأننا قد اخترنا المصفوفتين بعناية).

٤ - لتكن $A$ مصفوفة من النوع $r \times r$ على $K$ ولتكن $f = \text{ch}A$ . أثبت أن $f$ واحدية وأن $f(0) = (-1)^r \det A$ . استنتج أن مصفوفة رفيقة $C(g)$ تكون قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا كان $x \nmid g$ .

٥ - لتكن $A$ مصفوفة مربعة على $\mathbb{C}$ . أثبت أن $A$ تكون مشابهة لمصفوفة قطرية إذا وفقط إذا كانت لا توجد جذور مكررة لـ $\min A$ .

٦ - ليكن $V$ فضاء متجها منتهي البعد على $\mathbb{C}$ وليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$ ، وافرض أنه يوجد $s > 0$ بحيث $\alpha^s = \text{I}$ حيث I هو التحويل الخطي المحايد لـ $V$ . أثبت أنه يوجد أساس $v$ لـ $V$ بحيث تكون $M(\alpha, v)$ قطرية (استخدم التمرين الخامس).

٧ - اكتب بالتفصيل جميع الأشكال القانونية النسبية الممكنة للمصفوفات من النوع $2 \times 2$ وللمصفوفات من النوع $3 \times 3$ على الحقل $\mathbb{Z}_2$ . أثبت أن عدد فصول التشابه في $M_2(\mathbb{Z}_2)$ هو 6، وأن عدد فصول التشابه في $M_3(\mathbb{Z}_2)$ هو 14؛ وبالاستناد إلى ملاحظة الفصول التي تقابل المصفوفات القابلة للانعكاس، أثبت أن الزمرة $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ المؤلفة من العناصر القابلة للانعكاس في $M_2(\mathbb{Z}_2)$، يكون لها ثلاثة فصول ترافق، وأنه يكون للزمرة $GL_3(\mathbb{Z}_2)$ ستة فصول ترافق. افعل نفس الشيء للمصفوفات التي من النوع $2 \times 2$ على $\mathbb{Z}_3$ .

٨* - استخدم الأشكال القانونية النسبية لتثبت أنه لـ $n = 2, 3, 4$ على الترتيب، فإن

عدد فصول التشابه في $M_n(\mathbb{Z}_p)$ هو $p + p^2, p + p^2 + p^3, p + 2p^2 + p^3 + p^4$ وإن عدد فصول الترافق في $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ هو $p^2 - 1, p(p^2 - 1), p(p^3 - 1)$ . ($p$ عدد أولي) .

٩ - لتكن $A$ مصفوفة مربعة على $K$ . أثبت أن $A$ مشابهة لمصفوفة جوردانية على $K$ إذا وفقط إذا كانت جميع عوامل $\min A$ غير القابلة للتحليل في $K[x]$ خطية .

١٠- صف المصفوفات التي من النوع $2 \times 2$ على $\mathbb{C}$ وتحتوي فصول تشابهها على عنصر واحد . عمم إجابتك .

١١- ليكن $\theta : \text{End}_K V \to M_n(K)$ تماثل الحلقات الذي نحصل عليه عن طريق اختيار أساس ثابت لـ $V$ ، ثم بناء التقابل الموصوف في البند الثاني من الفصل السابع . أثبت أن التعريف التالي للتشابه في $\text{End}_K V$ لا يعتمد على اختيار $\theta$ : $\alpha, \alpha' \in \text{End}_K V$ متشابهان (similar) إذا وفقط إذا كانت $\theta(\alpha)$ و $\theta(\alpha')$ متشابهتين . تحقق من الادعاءات الموجودة في الملاحظة الثالثة التي تسبق المبرهنة (١١-١٩) مباشرة .

١٢- في $\mathbb{Z}_3[x]$ ، أثبت أن $(x - 1)^3 = x^3 - 1$ . ليكن $V$ فضاء متجها منتهي البعد على $\mathbb{Z}_3$ ، وليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$ ، وافرض أن $\alpha^3 = \text{I}$ . أثبت أنه يوجد أساس $v$ لـ $V$ بحيث تكون $M(\alpha, v)$ مصفوفة جوردانية . اكتب جميع الإمكانيات لهذه المصفوفة في الحالة التي يكون فيها $\dim V = 3$ .
ماذا تستطيع أن تقول عندما يكون $V$ فضاء على $\mathbb{Z}_p$ ($p$ عدد أولي في $\mathbb{Z}$) و $\alpha^p = \text{I}$ ؟

١٣- ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$ ، وانظر إلى $V$ كحلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$ . افرض أن $\text{ch}\alpha = p_1^{r_1} \ \dots \ p_k^{r_k}$ حيث $p_i = p_i(x)$ كثيرات حدود أولية واحدية مختلفة في $K[x]$. ليكن $q_i = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}$ . استخدم (٨-١٠) لتثبت أنه إذا كان $\{v_1, \dots, v_n\}$ أساسا لـ $V$ فإن العناصر $\{q_i(\alpha)(v_j) : j = 1, \dots, n\}$ تولد $V_i$ حيث $V_i$ مركبة أولية من النوع $p_i$ في $V$ . أثبت أيضا ، أن $V_i = \ker p_i(\alpha)^{r_i}$ .

١٤- لتكن $R$ حلقة تامة رئيسة، وليكن $p$ عنصرا أوليا في $R$. لتكن $M$ حلقية فتل من النوع $p$ دوروية على $R$. افرض أن $M = \sum_{i=1}^{s} Rx_i$ حيث مرتبة $x_i$ هي $p^{t_i}$ وحيث $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_s$. علاوة على ذلك، افرض أنه من المعلوم أن $M$ دوروية. أثبت أن $M = Rx_s$.

١٥- ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$. أثبت أن $\alpha$ دوروي إذا وفقط إذا كان $\min \alpha = \operatorname{ch} \alpha$. في هذه الحالة، أثبت أن نتائج التمرينين ١٣ و ١٤ تعطينا طريقة لتعيين مولدات للمركبات الأولية في $V$، وبالتالي (إذا كان $K = \mathbb{C}$) تعطينا طريقة لإيجاد أساس $v$ لـ $V$ بحيث تكون $M(\alpha, v)$ مصفوفة جوردانية.
طبق هذه الطريقة على التحويل الخطي لـ $\mathbb{C}^4$ الذي تكون مصفوفته بالنسبة إلى «الأساس المعتاد» $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ هي

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي أوجد مصفوفة $X$ من النوع $4 \times 4$ قابلة للانعكاس على $\mathbb{C}$ بحيث تكون $X^{-1}AX$ شكلا قانونيا جوردانيا للمصفوفة $A$.

# الفصل الثاني عشر

## حساب الأشكال القانونية

هدفنا في هذا الفصل إعطاء طريقة عملية لمعالجة المسألتين المتكافئتين التاليتين :

(i) إذا كان $\alpha$ تحويلا خطيا معطى لفضاء متجه $V$ ، فأوجد المصفوفات القانونية المختلفة الممكنة لـ $\alpha$ ، وأوجد أساسات لـ $V$ بحيث تعطي هذه المصفوفات القانونية .

(ii) إذا كانت $A$ مصفوفة معطاة من النوع $n \times n$ على $K$ ، فأوجد الأشكال القانونية المختلفة الممكنة لـ $A$ ، وأوجد مصفوفات $X$ قابلة للانعكاس من النوع $n \times n$ على $K$ بحيث تأخذ $X^{-1}AX$ هذه الأشكال القانونية .

تتحول المسألة (ii) إلى المسألة (i) إذا قمنا بما يلي : نأخذ فضاء متجها بُعده $n$ على $K$ ، ونفرض أن $\alpha$ هو التحويل الخطي لـ $V$ الذي تكون مصفوفته بالنسبة إلى أساس معين لـ $V$ هي $A$ . عندئذ ، تكون المصفوفات الممكنة لـ $\alpha$ ، بالنسبة إلى الأساسات المختلفة لـ $V$ ، هي المصفوفات المشابهة لـ $A$ وذلك ما شرحناه تكرارا .

### ١ – الصياغة الحلقياتية

نبدأ بدراسة المسألة (i) للمصفوفة القانونية النسبية لـ $\alpha$ . إذا نظرنا إلى $V$ كحلقية على $K[x]$ بواسطة $\alpha$ – كما هو معتاد – فإن المسألة تتحول إلى مسألة ايجاد تفريقٍ «لامتغير الفتل»

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s \qquad (1)$$

لـ $V$ بحيث تكون كل $V_i$ حلقية جزئية دوروية غير تافهة مرتبتها $d_i \in K[x]$ و $d_1 | \cdots | d_s$ وإيجاد مولد لكل $V_i$ حيث نعتبر $V_i$ حلقية على $K[x]$. بالاستناد إلى النتيجة (١١-١١)، فإننا نستطيع تكوين أساس لـ $V_i$ بحيث تكون مصفوفة $\alpha | _{V_i}$ بالنسبة إلى هذا الأساس هي المصفوفة الرفيقة لـ $d_i$، ثم نقوم بتجميع هذه الأساسات لنحصل على الأساس المطلوب لـ $V$.

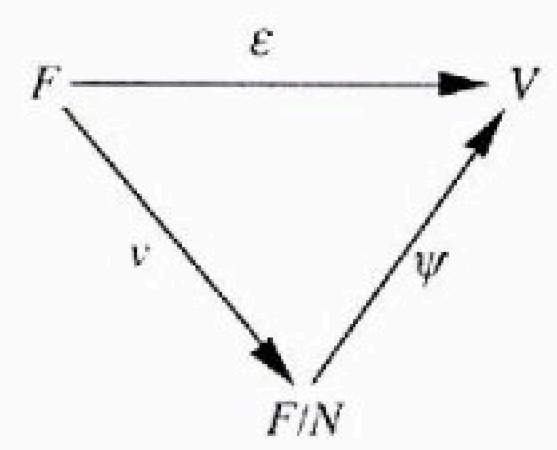
لكي نرى الكيفية التي نحصل بها على التفريق (1)، فإننا نتذكر الطريقة التي أثبتنا بها وجود مثل هذا التفريق في الفصلين السابع والثامن. وفي هذه المرحلة قد يستفيد القارئ من مراجعة المثال الثالث المحلول في نهاية الفصل العاشر. ليكن $v = \{v_1, ..., v_t\}$ أساسا لـ $V$ كفضاء متجه. عندئذ، من المؤكد أن $v$ يولد $V$ كحلقية على $K[x]$. لتكن $F$ حلقية حرة على $K[x]$ أساسها $f = \{f_1, ..., f_t\}$ (لاحظ أننا نتداول الآن نوعين من الأساسات - أساسات الفضاءات المتجهة وأساسات الحلقيات الحرة على $K[x]$). عندئذ، يوجد تشاكل حلقيات $\varepsilon : F \to V$ على $K[x]$ غامر ووحيد بحيث يرسل $f_i$ إلى $v_i$ لكل $1 \le i \le t$. ليكن $N = \ker \varepsilon$، وليكن $n$ أساسا لـ $N$ كحلقية على $K[x]$، ولتكن $A_x$ مصفوفة $n$ بالنسبة إلى $f$. (نستخدم اللاحقة $x$ للتأكيد على أن عناصر $A_x$ هي كثيرات حدود في $K[x]$). دعنا نستبق الأمور قليلا بالجزم بأن رتبة $N$ هي $t$. إن هذا يعني أن $A_x$ مصفوفة ما من النوع $t \times t$ بحيث تنتمي عناصر $A_x$ إلى $K[x]$ التي ليست حلقة تامة رئيسة فقط وإنما هي حلقة إقليدية كذلك. إذن، باستخدام العمليات الصفية الابتدائية والعمليات العمودية الابتدائية، نستطيع أن نختزل $A_x$ إلى مصفوفة عوامل لامتغيرة $\operatorname{diag}(c_1, ..., c_t)$ حيث $c_i \in K[x]$ وحيث $c_1 | \cdots | c_t$ (انظر البند الخامس في الفصل السابع). عندئذ، نستطيع أن نجد مصفوفتين $X$ و $Y$ من النوع $t \times t$ قابلتين للانعكاس على $K[x]$ بحيث:

$$X^{-1} A_x Y = \operatorname{diag}(c_1, ..., c_t)$$

ليكن $f^* = \left\{f_1^*, \ ..., \ f_t^*\right\}$ أساس $F$ الذي مصفوفته بالنسبة إلى $f$ هي $X$.

عندئذ، فإن $\left\{c_1 f_1^*, \ ..., \ c_t f_t^*\right\}$ أساس لـ $N$- في الحقيقة، إنه أساس $N$ الذي مصفوفته بالنسبة إلى $n$ هي $Y$ (انظر البند الثالث في الفصل السابع). إذن، إن $F/N$ هي المجموع

المباشر للحلقيات الجزئية الدوروية المولدة بالعناصر $f_1^* + N, \ldots, f_t^* + N$ ، وإن مراتب هذه العناصر هي $c_1, \ldots, c_t$ على الترتيب . عندئذ، بالاستناد إلى الرسم التخطيطي المعتاد (انظر برهان (٨-٢))




حيث $\psi$ تماثل ، فإننا نجد أن $V$ هي المجموع المباشر للحلقيات الجزئية الدوروية المولدة بالعناصر $\varepsilon\left(f_1^*\right), \ldots, \varepsilon\left(f_t^*\right)$ وأن مراتب هذه العناصر هي $c_1, \ldots, c_t$ . من الممكن لبعض الحلقيات الموجودة في البداية أن يساوي الصفر ؛ وبالتالي فإن الحلقيات المتبقية تعطينا التفريق «اللامتغير الفتل» المطلوب لـ $V$ .

من أجل أن نحول هذا إلى برنامج عملي ، فإنه يجب علينا أن نعرف كيف نجد $f_1^*, \ldots, f_t^*$ . تعين المصفوفة $X$ هذه العناصر ، وتعتمد $X$ على $A_x$ التي هي مصفوفة $n$ بالنسبة إلى $f$ . إذن ، لكي نبدأ ، فإننا نحتاج إلى أن نجد أساسا لـ $N$ التي هي نواة $\varepsilon$ .

## ٢ – نواة ε

**(١٢–١) مأخوذة**

*نستخدم الترميز الموجود في البند السابق . لتكن $A = (a_{kl}) = M(\alpha, v)$ وضع $n_i = xf_i - \sum_{j=1}^{t} a_{ji} f_j$ لكل $i = 1, 2, \ldots, t$ . عندئذ ، فإن $n = \{n_1, \ldots, n_t\}$ أساس لـ $N$ . بوجه خاص ، إن رتبة $N$ تساوي رتبة $F$ .*

**البرهـــان**

نـلاحـظ أولا أن شـكـل أي عـنـصـر $f \in F$ هـو $f = \sum_{i=1}^{t} g_i(x) f_i$ حـيـث $g_i(x) \in K[x]$ وأن تأثير $\varepsilon$ في مثل هذا العنصر يعطى بواسطة

$$\varepsilon(\Sigma g_i(x)f_i) = \Sigma g_i(x)v_i = \Sigma g_i(\alpha)(v_i)$$

إذن $\varepsilon(n_i) = \alpha(v_i) - \Sigma a_{ji}v_j = 0$ لأن $A = M(\alpha, v)$. إذن، كل $n_i$ ينتمي إلى $N$.

الآن، سنثبت أن $n$ يولد $N$. من أجل ذلك نفرض أن $N^*$ هي الحلقية الجزئية المولدة بالأساس $n$؛ أي $N^* = \sum_{i=1}^{t} K[x]n_i$ . عندئذ، إن

$$N^* \subseteq N \qquad (2)$$

لتكن $W$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $F$ ومن الشكل $\sum_{i=1}^{t} c_i f_i$ حيث $c_i \in K$، ولتكن $F^* = N^* + W$. إذن $F^*$ تتكون من جميع العناصر $n^* + \Sigma c_i f_i$ حيث $n^* \in N^*$ و $c_i \in K$. الآن، واضح أن $F^*$ زمرة جزئية جمعية من $F$، وأنها مغلقة بالنسبة إلى الضرب بالسلّميات التي تنتمي إلى $K$. ندعي أنها حلقية جزئية من $F$. في الحقيقة، إن $xf_i = n_i + \Sigma a_{ji}f_j$ وبالتالي فإن

$$x(n^* + \Sigma c_i f_i) = (xn^* + \Sigma c_i n_i) + \Sigma a_{ji}c_i f_j$$

ينتمي إلى $F^*$. إذن $xF^* \subseteq F^*$. عندئذ، يستطيع القارئ بسهولة أن يستخدم الاستقراء الرياضي ليثبت أن $x^l F^* \subseteq F^*$ لكل $l \geq 1$. إذن، إذا كان $b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k \in K[x]$ وكان $f \in F^*$ فإن

$$(b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k)\, f = b_0f + b_1(xf) + \ldots + b_k(x^kf) \in F^*.$$

وبالتالي فإن $F^*$ حلقية جزئية. بما أن $F^*$ تحتوي على $f_1, \ldots, f_t$ فإن $F^* = F$.

الآن، ليكن $u$ عنصرا اختياريا في $N$. عندئذ، بما أن $u \in F^*$ فإن $u = n^* + \Sigma c_i f_i$ لعناصر مناسبة $c_i \in K$ و $n^* \in N^*$. إذن باستخدام (2) نحصل على $0 = \varepsilon(u) = \varepsilon(n^*) + \Sigma c_i \varepsilon(f_i) = \Sigma c_i v_i$. ولكن العناصر $v_i$ مستقلة خطيا في $V$، إذن $c_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq t$، وبالتالي، فإن $u = n^* \in N^*$. إذن $N = N^*$ كما ادعينا.

من أجل أن نتم البرهان، يجب أن نثبت أن $n$ مستقلة خطيا. ويمكن استنتاج ذلك من الحقيقة التي مفادها أن $F/N$ حلقية فتل، كما يمكن إثبات ذلك مباشرة كما يلي: افرض أن $\Sigma h_i(x)n_i = 0$. عندئذ، بالتعويض عن العناصر $n_i$ نحصل على:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i h_i(x)\left(xf_i - \sum_j a_{ji}\, f_j\right) \\ &= \sum_i xh_i(x)f_i - \sum_{i,j} a_{ji}\, h_i(x)f_j \\ &= \sum_i \left(xh_i(x) - \sum_j a_{ij}\, h_j(x)\right) f_i \end{aligned}$$

بما أن العناصر $f_i$ مستقلة خطيا فإن كل معامل في هذه العلاقة يجب أن ينعدم . الآن، من أجل الحصول على تناقض، نفرض أنه ليس صحيحا أن جميع العناصر $h_i$ تساوي الصفر، ونختار $h_k$ بحيث تكون درجة $h_k$ أعظمية . لتكن هذه الدرجة الأعظمية هي $l$. إذن $l \geq 0$، وبالتالي فإن درجة $xh_k(x)$ هي $l + 1$، بينما درجة $\sum_j a_{kj}\, h_j(x)$ أقل من أو تساوي $l$. إذن، إن معامل $f_k$ لا يمكن أن يكون صفرا وهذا هو التناقض الذي نبحث عنه .

**(١٢-٢) نتيجة**

*إن المصفوفة $A_x$ هي*

$$\begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1t} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{t1} & -a_{t2} & \cdots & x - a_{tt} \end{bmatrix} = x1_t - A$$

**البرهـــان**

من التعريف نحصل على

$$n_i = -a_{1i}f_1 - a_{2i}f_2 - \ldots + (x - a_{ii})f_i - \ldots - a_{ti}f_t$$

**(١٢-٣) نتيجة**

*إن لامتغيرات الفتل لـ $V$ هي العوامل اللامتغيرة غير الثابتة لـ $x1_t - A$.*

**البرهـــــان**

نحصل على هذه النتيجة بالاستناد إلى (١٢-٢)، وإلى الدراسة الموجودة في البند السابق.

## ٣ - الشكل القانوني النسبي

الآن، يوجد لدينا طريقة لإيجاد المصفوفة القانونية النسبية لتحويل خطي (أو الشكل القانوني النسبي لمصفوفة)، ولكي نوضح الأمور، فإننا سنعطي مثالا عدديا. ولكننا نلاحظ أولا ما يلي: من أجل أن نحصل على أساس لـ $V$، بحيث يحول هذا الأساس تشاكلا داخليا إلى الشكل القانوني، فإننا نحتاج فقط إلى معرفة المصفوفة $X$ ولا نحتاج إلى معرفة المصفوفة $Y$ (نستخدم ترميز البند الأول). إذن، عندما نختزل $x1_t - A$، فإننا نحتاج إلى تسجيل العمليات الصفية المستخدمة ليس إلا، ولا نحتاج إلى تدوين العمليات التي أجريت على الأعمدة. بالرغم من ذلك فإننا، في المثال التالي، سوف نسجل العمليات الصفية والعمليات العمودية من أجل مساعدة القارئ على متابعة الحسابات.

**مثال محلول**

ليكن $V$ فضاء بعده 4 على $\mathbb{Q}$ وليكن $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ أساسا لـ $V$. ليكن $\alpha$ تحويلا خطيا لـ $V$ بحيث تكون مصفوفته بالنسبة إلى $v$ هي

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد أساسا $u$ لـ $V$ بحيث تكون $M(\alpha, u)$ المصفوفة القانونية النسبية لـ $\alpha$. أوجد مصفوفة T من النوع $4 \times 4$ قابلة للانعكاس على $\mathbb{Q}$ بحيث تكون $T^{-1}AT$ الشكل القانوني النسبي لـ $A$.

أولا ، لتكن $F$ حلقية حرة على $\mathbb{Q}[x]$ أساسها $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ وليكن $\varepsilon$ تشاكل الحلقيات على $\mathbb{Q}[x]$ الغامر الذي يرسل $f_i$ إلى $v_i$ لكل $1 \leq i \leq 4$ . عندئذ ، بالاستناد إلى (١٢-٢) ، فإنه يوجد أساس لـ $\ker \varepsilon = N$ بحيث تكون مصفوفته بالنسبة إلى $f$ هي :

$$x1_4 - A = \begin{bmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-2 \end{bmatrix}$$

تكون الخطوة الأولى هي اختزال هذه المصفوفة على $\mathbb{Q}[x]$ إلى مصفوفة عوامل لامتغيرة . سوف نستخدم الترميز المقدم في البند الثامن من الفصل السابع للعمليات الصفية الابتدائية وللعمليات العمودية الابتدائية ، وفي كل مرحلة من مراحل الاختزال سوف ندون متتالية العمليات التي تؤثر في تلك المرحلة .

إن الاختزال يتم كما يلي :

$$\begin{bmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} R_1 \longleftrightarrow R_2 \\ R_2 - (x-2)R_1 \\ R_4 + R_1 \\ C_1 - (x-1)C_2 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(x-1)(x-2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & x-2 & -1 & x-2 \end{bmatrix}$$

الآن ، نجري العمليات على المصفوفة الجزئية السفلى اليمنى التي من النوع $3 \times 3$ ، ولكننا نرقم صفوفها وأعمدتها كما في المصفوفة الأصلية ، ونحصل على :

$$\begin{bmatrix} -(x-1)(x-2) & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ x-2 & -1 & x-2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_3 + (x-1)(x-2)R_2 \\ R_4 - (x-2)R_2 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x(x-1)(x-2) & (x-1)(x-2) \\ 0 & -1-x(x-2) & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} C_3 - xC_2 \\ C_4 - C_2 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x(x-1)(x-2) & (x-1)(x-2) \\ 0 & -(x-1)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

الآن، نجري العمليات على المصفوفة الجزئية المتبقية التي من النوع $2 \times 2$، وذلك بأن نحضر عنصرا من الدرجة الصغرى إلى الموقع القائد.

$$\longrightarrow C_3 \longleftrightarrow C_4 \begin{bmatrix} (x-1)(x-2) & x(x-1)(x-2) \\ 0 & -(x-1)^2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} C_4 - xC_3 \\ -1 \times C_4 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} (x-1)(x-2) & 0 \\ 0 & (x-1)^2 \end{bmatrix}$$

بالرغم من أن هذه مصفوفة قطرية، إلا أن شرط القسمة غير متحقق. إذن نكمل كما يلي:

$$\longrightarrow \left.\begin{matrix} R_3 + R_4 \\ C_4 - C_3 \\ C_4 \leftrightarrow C_4 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} x-1 & (x-1)(x-2) \\ (x-1)^2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left.\begin{matrix} C_4 - (x-2)C_3 \\ R_4 - (x-1)R_3 \\ -1 \times C_4 \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & (x-1)^2(x-2) \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإننا نكون قد اختزلنا $x1_4 - A$ إلى $\text{diag}(1, 1, (x-1), (x-1)^2(x-2))$، ومن هنا نجد لامتغيرات الفتل لـ $V$. وإذا طبقنا متتالية العمليات الصفية ومتتالية العمليات

العمودية على $1_4$ على الترتيب، فإننا نحصل على مصفوفتين $X^{-1}$ و $Y$ من النوع $4 \times 4$ قابلتين للانعكاس على $\mathbb{Q}[x]$ بحيث

$$X^{-1}(x1_4 - A)Y = \text{diag}(1, 1, x-1, (x-1)^2(x-2))$$

إذا كان $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*\}$ هو أساس $F$ الذي تكون مصفوفته بالنسبة إلى $f$ هي $X$، فإن $\{f_1^*, f_2^*, (x-1)f_3^*, (x-1)^2(x-2)f_4^*\}$ يكون أساسا لـ $N$ وينتج أن $F/N$ هي المجموع المباشر لحلقية جزئية دوروية مرتبتها $(x-1)$ مولدة بالعنصر $f_3^* + N$ وحلقية جزئية أخرى مرتبتها $(x-1)^2(x-2)$ مولدة بالعنصر $f_4^* + N$.

إذن، إن $x-1, (x-1)^2(x-2)$ هي لامتغيرات الفتل لـ $V \cong F/N$ وبالتالي فإن المصفوفة القانونية النسبية لـ $\alpha$ هي

$$C(x-1) \oplus C\left((x-1)^2(x-2)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ونسمي هذه المصفوفة $R$. حتى الآن، لم نكن بحاجة إلى معرفة المصفوفة $X$، ولكننا سنحتاج إلى حساب $X$ لإيجاد أساس لـ $V$ بحيث تكون مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى هذا الأساس هي $R$. نذكر بأن تطبيق متتالية العمليات الصفية المستخدمة أعلاه على $1_4$ يعطينا $X^{-1}$، وبالتالي فإن تطبيق معكوسات هذه العمليات بالترتيب العكسي على $1_4$ يعطينا $X$ (انظر المثال الثالث المحلول في نهاية الفصل العاشر). إذن، إن متتالية العمليات التي يجب أن نطبقها هي

$$R_4 + (x-1)R_3,\ R_3 - R_4,\ R_4 + (x-2)R_2,\ R_3 - (x-1)(x-2)R_2,$$
$$R_2 \leftrightarrow R_3,\ R_4 - R_1,\ R_2 + (x-2)R_1,\ R_1 \leftrightarrow R_2$$

وبعد تطبيق هذه العمليات نحصل على

$$X = \begin{bmatrix} x-2 & -(x-1)(x-2) & -(x-2) & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & x-1 & 1 \end{bmatrix}$$

إن العمودين الأخيرين في هذه المصفوفة يعطيان إحداثيات $f_3^*$ و $f_4^*$ بالنسبة إلى $f$؛ وبالتالي فإن

$$f_3^* = -(x-2)f_1 + (x-1)f_4$$

$$f_4^* = -f_1 + f_4$$

إذن $V$ هي المجموع المباشر لحلقية جزئية $V_1$ دوروية مرتبتها $(x-1)$ مولدة بالعنصر $\varepsilon\left(f_3^*\right) = -(\alpha - 2I)(v_1) + (\alpha - I)(v_4) = v_2 - v_3$ وحلقية جزئية $V_2$ دوروية مرتبتها $(x-1)^2(x-2)$ مولدة بالعنصر $\varepsilon\left(f_4^*\right) = -v_1 + v_4$ . بالاستناد إلى (١١-١٠)، فإنه يوجد أساسٌ لـ $V_2$ كفضاء متجه مكونٌ من العناصر $-v_1 + v_4,\ \alpha(-v_1 + v_4),\ \alpha^2(-v_1 + v_4)$ وبعد الحساب نجد أن هذا الأساس هو

$$-v_1 + v_4,\ -2v_1 + v_2 - v_3 + v_4,\ -4v_1 + 3v_2 - 2v_3$$

عندئذ، ينتج من (١١-١١)، أن مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى

$$u = \{v_2 - v_3,\ -v_1 + v_4,\ -2v_1 + v_2 - v_3 + v_4,\ -4v_1 + 3v_2 - 2v_3\}$$

(الذي هو أساس لـ $V$) هي المصفوفة القانونية النسبية $R$.

إن مصفوفة الأساس $u$ بالنسبة إلى الأساس الأصلي $v$ هي

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $T^{-1}AT = R$ . ويمكن التحقق من ذلك بواسطة الحساب. (من أجل تجنب حساب $T^{-1}$ تحقق من أن $\det T \neq 0$ وأن $AT = TR$).

## ٤ - الأشكال النسبية الأولية والأشكال القانونية الجوردانية

الآن، وبعد أن حصلنا على أساس لـ $V$ بحيث تكون مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى هذا الأساس قانونية نسبية، فإننا نستطيع بسهولة أن نجد أساسات بحيث تكون مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى هذه الأساسات قانونية نسبية أولية أو جوردانية. وكما ذكرنا سابقا، فإن إيجاد مثل هذه الأساسات يتطلب تفريق $V$ إلى مجموع مباشر لحلقيات جزئية دوروية أولية، وبالاستناد إلى (٨-١١)، فإنه يمكن الحصول على مثل هذا التفريق فورا إذا عبرنا عن $V$، بطريقة ما، كمجموع مباشر لحلقيات جزئية دوروية. عندئذ، بالاستناد إلى (١١-١١) و (١١-١٤)، فإننا نعرف كيف نختار أساسات في المجمعات الدوروية الأولية بحيث نحصل على مختلف الأشكال القانونية. في كل حالة، يجب علينا أن نقوم بتجميع المجمعات المقابلة لعنصر أولي معطى، ثم نرتبها وفقا لتزايد البعد؛ بحيث تظهر القطاعات القطرية بالترتيب المناسب على القطر.

### مثال محلول

استخدم الترميز الموجود في المثال المحلول في البند السابق، وأوجد أساسات لـ $V$ بحيث تكون مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى هذه الأساسات (i) مصفوفة قانونية نسبية أولية، (ii) مصفوفة جوردانية. أوجد مصفوفتين $U$ و $W$ بحيث تكون $U^{-1}AU$ شكلا قانونيا نسبيا أوليا لـ $A$ وبحيث تكون $W^{-1}AW$ شكلا جوردانيا قانونيا لـ $A$.

لقد حصلنا سابقا على لامتغيرات الفتل لـ $V$ وهي $(1 - x)$ و $(2 - x)(1 - x)^2$.
إن $V = V_1 \oplus V_2$ حيث $V_1$ دوروية مرتبتها $(1 - x)$، مولدة بالعنصر $w = v_2 - v_3$ وحيث $V_2$ دوروية مرتبتها $(2 - x)(1 - x)^2$، مولدة بالعنصر $u = -v_1 + v_4$. بالاستناد إلى (٨-١١)، فإن $V_2$ هي المجموع المباشر لحلقية دوروية $V_{21}$ مرتبتها $(1 - x)^2$، مولدة بالعنصر $(2 - x)u$ وحلقية دوروية $V_{22}$ مرتبتها $(2 - x)$، مولدة بالعنصر $(1 - x)^2u$.
إذن، إن اللامتغيرات الأولية لـ $V$ هي $(2 - x)$, $(1 - x)^2$, $(1 - x)$. إذن، فإن

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة قانونية نسبية أولية لـ $\alpha$ ، وإن

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة جوردانية قانونية لـ$\alpha$ . نلاحظ أنه يمكن الحصول دائما على هذه المصفوفات إذا عرفنا لامتغيرات الفتل لـ $V$ . ونلاحظ أيضا أنه بالرغم من أن الشكل الجورداني القانوني غير متاح على $\mathbb{Q}$ عادة فإنه متاح في هذه الحالة لأن كل لامتغير أولي يظهر كقوة لكثيرة حدود خطية .

من أجل الحصول على أساسات بحيث تكون مصفوفة $\alpha$ بالنسبة إلى هذه الأساسات من هذه الأشكال ، فإننا نحسب $(x-2)u = (\alpha - 2\mathrm{I})(u)$ و $(x-1)^2u = (\alpha - \mathrm{I})^2(u)$ ؛ وبإجراء الحساب نحصل على $u_1 = v_2 - v_3 - v_4$ و $u_2 = -v_1 + v_2 - v_4$ على الترتيب . إذن، فإن $V = V_1 \oplus V_{21} \oplus V_{22}$ وإن هذه المركبات دوروية مراتبها $x - 1, (x-1)^2, x-2$ ، مولدة بالعناصر $w, u_1, u_2$ على الترتيب . و بالاستناد إلى (١١-١١)، فإن :

$$\{w, u_1, \alpha(u_1), u_2\} = \{v_2 - v_3, v_2 - v_3 - v_4, v_2 - 2v_4, -v_1 + v_2 - v_4\}$$

أساس لـ $V$ بحيث يعطي مصفوفة قانونية نسبية أولية لـ $\alpha$ . إن مصفوفة هذا الأساس بالنسبة إلى $v$ هي :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $U^{-1}AU$ هي الشكل القانوني النسبي الأولي $P$ ؛ ويمكن أن نتأكد من ذلك مباشرة .

بالاستناد إلى (١١-١٤)، فإن $\{w, u_1, (\alpha - I)(u_1), u_2\}$ ؛ أي $\{v_2 - v_3, v_2 - v_3 - v_4, v_3 - v_4, -v_1 + v_2 - v_4\}$ ، أساس يعطي مصفوفة جوردانية لـ $\alpha$ . إن مصفوفة هذا الأساس بالنسبة إلى $v$ هي

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ويمكن للقارئ أن يتأكد بسهولة من أن $W^{-1}AW$ هي المصفوفة الجوردانية $J$.

## تمارين على الفصل الثاني عشر

١ - لكل من المصفوفات التالية $A$، أوجد مصفوفات قابلة الانعكاس $X$ بحيث تأخذ $X^{-1}AX$ مختلف الأشكال القانونية لـ $A$. (اعتبر أن الحقل هو $\mathbb{C}$ إذا كان ذلك ضروريا من أجل إيجاد الشكل $JCF$).

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، (جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

٢ - أوجد الشكل $JCF$ للمصفوفات التالية:

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

٣ - أوجد الشكل القانوني النسبي، والشكل القانوني النسبي الأولي للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

على $\mathbb{Z}_2$، وأثبت أن هذه المصفوفة غير متشابهة مع مصفوفة جوردانية على $\mathbb{Z}_2$.

٤* - لتكن $A$ و $B$ مصفوفتين من النوع $n \times n$ على الحقل $K$. أثبت أن $A$ و $B$ متشابهتان على $K$ إذا وفقط إذا كانت $x1_n - A$ و $x1_n - B$ متكافئتين على $K[x]$.

٥* - لتكن $V$ حلقية على $K[x]$ بواسطة التحويل الخطي $\alpha$. بالاستناد إلى برهان (٩-٢) نقدم أدناه مخططا تمهيديا لطريقة يمكن استخدامها لتفريق $V$ كمجموع مباشر لحلقيات جزئية دوروية أولية، وبالتالي يمكن استخدامها للحصول على الأشكال القانونية لـ $\alpha$. أكمل التفاصيل الناقصة في كل خطوة وتحقق من صحة الطريقة.

(أ) أوجد المركبات الأولية لـ $V$ باستخدام طريقة التمرين الثالث عشر في الفصل الحادي عشر. إن هذا يختزل مسألتنا إلى الحالة التي تكون فيها $V$ أولية.

(ب) الآن، افرض أن $V$ حلقية فتل من النوع $p$ حيث $p = p(x)$ عنصر أولي في $K[x]$. لتكن $\{v_1, \ldots, v_t\}$ أية مجموعة مولدة لـ $V$ كحلقية على $K[x]$ (على سبيل المثال، يمكن أن نأخذ أساسا لـ $V$). أوجد المرتبة $p^{n_i}$ لكل $v_i$. أعد الترقيم بحيث يكون $n_1 \geq n_i$ لكل $i$.

(جـ) لتكن $V_1$ هي الحلقية الجزئية المولدة بالعنصر $v_1$. إذا كانت درجة $p^{n_1}$ هي $e_1$ فإن $\mathbf{v}_1 = \{v_1, \alpha(v_1), \ldots, \alpha^{e_1 - 1}(v_1)\}$ أساس لـ $V_1$. لـ $i \geq 2$، احذف من المجموعة المولدة جميع العناصر $v_i$ التي تنتمي إلى $V_1$.

(د) لكل $i > 1$، أوجد أصغر عدد صحيح $m_i > 0$ بحيث $p^{m_i} v_i \in V_1$. احصل على العبارة $p(x)^{m_i} v_i = q_i(x) v_1$ وذلك عن طريق كتابة $p^{m_i} v_i$ كتركيب خطي من عناصر $\mathbf{v}_1$. أثبت أن $p^{m_i} \mid q_i$، وأنه إذا كان

$r_i$ $q_i = p^{m_i}$ و $v_i' = v_i - r_i v_1$ فــإن مــرتــبــة $v_i'$ هــي $p^{m_i}$ و $V_1 + K[x]v_i = V_1 \oplus K[x]v_i'$ . لاحظ أن $m_i \leq n_i$.

(هـ) الآن، نستطيع أن نفرض أن $V_1 + K[x]v_i = V_1 \oplus K[x]v_i$ لكل $i > 1$.

الآن، أعد ترقيم $v_2, \ldots, v_l$ بحيث تكون مرتبة $v_2$ هي $p^{n_2}$ حيث $n_2 \geq n_i$ لـ $i \geq 2$. لتكن $V_2 = K[x]v_2$.

تابع هذه الطريقة خطوة خطوة لكي تمدد المجموع $V_1 \oplus V_2$ إلى تفريق مباشر لـ $V$ إلى مجمعات دوروية.

٦ - استخدم الطريقة المعطاة في التمرين السابق لإيجاد مصوفة $X$ بحيث تكون $X^{-1}AX$ في الشكل القانوني الجورداني حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حاول أن تطبق هذه الطريقة على مصفوفات التمارين السابقة.

٧ - ليكن $\alpha$ تشاكلا داخليا لفضاء متجه $V$ (ذي بعد مناسب على $\mathbb{C}$) بحيث تكون $M(\alpha, \mathbf{v})$ إحدى مصفوفات التمرين الأول، حيث $\mathbf{v}$ أساس ما لـ $V$. صف جميع المتجهات $v \neq 0$ بحيث $\alpha v = \lambda v$ لعنصر ما $\lambda \in \mathbb{C}$. تسمى المتجهات التي من هذا النمط «متجهات ذاتية» (eigenvectors) لـ $\alpha$. (**إرشاد:** يمكن للقارئ أن يستعين بالمأخوذة (٨-١٧)).



# المراجـــع

COHN, P.M. (1965). Universal Algebra, Harper and Row, New York.

HALMOS, P. (1960). Naive Set Theory, D. Van Nostrand, Princeton, N.J.

JACOBSON, N. (1951). Lectures in Abstract Algbera, Vol. I, D. Van Nostrand, New York.

KELLEY, J.L. (1955). General Topology, D. Van Nostrand, New York.

MACLANE, S. and BIRKHOFF, G. (1967). Algebra, Macmillan, New York.

SAMUEL, P. (1958). Unique Factorization, American Mathemtical Monthly, 75 pp. 945-952.

ZARISKI, O. and SAMUEL, P. (1958). Commutative Algebra, D. Van Nostrand, Princeton, N. J.

# ثبت المصطلحات

- عربي – إنجليزي
- إنجليزي – عربي

## أولا: عربي – إنجليزي

**ا**

| | |
|---|---|
| إبتدائي | Elementary (initial) |
| إبدالي | Commutative |
| اتحاد منفصل | Disjoint union |
| اختزال | Reduction |
| اختصار | Cancellation |
| ارتفاع | Height |
| أساس | Basis |
| غير مرتب | Unordered basis |
| مرتب | Ordered basis |
| إسقاط | Projection |
| إسقاطات إحداثية | Coordinate Projections |
| أصغري | Minimal |
| أعداد جاوس | Gaussian integers |
| صحيحة | Integers |
| أعظمي | Maximal |

| | |
|---|---|
| اقتران | Morphism |
| اقتصار دالة | Restriction of a function |
| إقليدي | Euclidean |
| إنشاء | Construction |
| انشطار | Splitting |
| أولي | Prime (primary) |

## ب

| | |
|---|---|
| باق | Remainder |
| بعدً | Dimension |
| بناء | Construction |
| بنية | Structure |

## ت

| | |
|---|---|
| تبديل | Permutation |
| تجميعي | Associative |
| تحت سقف | Up to |
| تحليل | Factorization |
| تحويل خطي | Linear transformation |
| ترتيب | Ordering (order) |
| جزئي | Partial ordering |
| تركيب التطبيقات | Composition of maps |
| ترميز | Notation |
| تشاكل | Homomorphism |

| | |
|---|---|
| Endomorphism | داخلي |
| Natural homomorphism | طبيعي |
| R-homomorphism | على R |
| Epimorphism | غامر |
| Monomorphism | متباين |
| Classification | تصنيف |
| Map | تطبيق |
| Definition | تعريف |
| Change of basis | تغيير الأساس |
| Decomposition | تفريق |
| Bijection (one-to-one and onto map) | تقابل |
| Bijective (one-to-one and onto) | تقابلي |
| Equivalence | تكافؤ |
| Isomorphism | تماثل |
| Automorphism | ذاتي |
| Presentation | تمثيل |

## ج

| | |
|---|---|
| Algebra | جبرية |
| Universal algebra | شاملة |
| Product | جداء |
| Cartesian product | ديكارتي |
| Conversion table | جدول التحويل |
| Root | جذر |
| Characteristic roots | جذور مميزة |

| | |
|---|---|
| جمع | Addition |
| جمعي | Additive |

## ح

| | |
|---|---|
| حاصل الضرب | Product |
| حُر | Free |
| حرة من الفتل | Torsion-free |
| حقل | Field |
| حلقة | Ring |
| إقليدية | Euclidean domain |
| بمحايد | Ring with a multiplicative identity |
| تامة | Integral domain |
| رئيسة | Principal ideal domain |
| تحليل وحيد | Unique factorization domain |
| جاوس | Gaussian domain |
| جزئية | Subring |
| القسمة | Quotient ring |
| كثيرات الحدود | Polynomial Ring |
| نويثرية | Noetherian ring |
| حلقية | Module |
| جزئية | Submodule |
| علىR | R-module |
| فتل من النوع p | p-Torsion module |
| القسمة | Quotient module |
| يسرى على R | Left R-module |

| | |
|---|---|
| Right R-module | يمنى على R |

**خ**

| | |
|---|---|
| Property | خاصة |
| Euclidean division property | القسمة الإقليدية |
| Algorithm | خوارزمية |
| Euclidean algorithm | إقليدس |

**د**

| | |
|---|---|
| Function | دالة |
| Euclidean function | إقليدية |
| Norm function | معيار |
| Degree | درجة |
| Kronecker delta | دلتا كرونكر |
| Cyclic | دوروي |
| Periodic | دوري |

**ذ**

| | |
|---|---|
| Atomic | ذري |
| Finite-dimensional | ذو بعد منته |

**ر**

| | |
|---|---|
| Residue | راسب |

| | |
|---|---|
| رتبة | Rank (order) |
| حرة من الفتل | Torsion-free rank |
| رسم تخطيطي | Diagram |

## ز

| | |
|---|---|
| زمرة | Group |
| جزئية | Subgroup |

## س

| | |
|---|---|
| سلسلة | Chain |
| سلمي | Scalar |

## ش

| | |
|---|---|
| شامل | Universal |
| شبه زمرة | Semigroup |
| شرط | Condition |
| السلسة التصاعدية | Ascending chain condition |
| شكل | Form |

## ص

| | |
|---|---|
| صف | Row |
| صفر | Zero |

| | |
|---|---|
| صورة | Image |
| عكسية | Inverse image |

## ض

| | |
|---|---|
| ضرب | Multiplication |
| ضربي | Multiplicative |

## ط

| | |
|---|---|
| طمر | Embedding |
| طول العنصر | Length of element |

## ع

| | |
|---|---|
| عامل | Factor |
| مشترك أعلى | Highest common factor (hcf) |
| عديد | Tuple |
| من النوع n | n-Tuple |
| عديم الفتل | Torsion-free |
| علاقة | Relation |
| تكافؤ | Equivalence relation |
| عمليات | Operations |
| صفية ابتدائية | Elementary row operations |
| على المركبات | Componentwise operations |
| عمودية ابتدائية | Elementary column operations |

| | |
|---|---|
| عمليات نقطية | Pointwise operations |
| عملية | Operation |
| أحادية | Unary operation |
| ثانوية | Secondary operation |
| عمود | Column |
| عنصر | Element |
| جيد | Good element |
| سيء | Bad element |
| محايد | Identity element (neutral element) |
| وحدة | Unit |

غ

| | |
|---|---|
| غامر (شامل) | Surjective (onto) |
| غمر | Embedding |
| غير شاذة | Non-singular |
| قابل للتحليل | Irreducible |
| للتفريق | Indecomposable |
| مرتب | Unordered |
| مستقلة | Dependent |
| منته | Infinite |

ف

| | |
|---|---|
| فتل | Torsion |
| فصل | Class |

| | |
|---|---|
| Congruence class modulo n | تطابق قياس n |
| Residue class modulo n | راسب قياس n |
| Space | فضاء |
| Subspace | جزئي |
| Vector space | متجه |
| Redundance of hypotheses | فيض الفروض |

## ق

| | |
|---|---|
| Invertible | قابلة للانعكاس |
| Reducible | للتحليل |
| Decomposable | للتفريق |
| Divisor | قاسم |
| Elementary divisor | ابتدائي |
| Zero divisor | للصفر |
| Greatest common divisor (gcd) | مشترك أعظم |
| Rule of thumb | قاعدة الإبهام |
| Law | قانون |
| Parallelogram law | متوازي الأضلاع |
| Canonical | قانوني |
| Block | قطاع |
| Diagonal | قطر |
| Eigenvalue | قيمة ذاتية |

## ك

| | |
|---|---|
| Polynomial | كثيرة حدود |

| | |
|---|---|
| كثيرة حدود أصغرية | Minimal polynomial |
| ثابتة | Constant polynomial |
| مميزة | Characteristic polynomial |
| واحدية | Monic polynomial |

## ل

| | |
|---|---|
| لامثال | Non-example |
| لامتغيرات | Invariants |
| أولية | Primary invariants |
| الفتل | Torsion invariants |

## م

| | |
|---|---|
| مأخوذة | Lemma |
| مبرهنة | Theorem |
| متباين (أحادي) | Injective (one-to-one) |
| متتالية | Sequence |
| متجه | Vector |
| ذاتي | Eigenvector |
| متداخل | Nested |
| مترافق | Conjugate |
| متشابه | Similar |
| متشاركان | Associates |
| متعامل | Cofactor |
| متغير | Indeterminate (variable) |

| | |
|---|---|
| Equivalent | متكافىء |
| Ideal | مثالي |
| Left ideal | أيسر |
| Right ideal | أيمن |
| Order ideal | ترتيب |
| Principal ideal | رئيسي |
| Summand | مجمع |
| Sum | مجموع |
| Set | مجموعة |
| Power set | القوة |
| Coset | مشاركة |
| Linearly dependent set | غير مستقلة خطيا |
| Linearly independent set | مستقلة خطيا |
| Linearly dependent set | مرتبطة خطيا |
| Spanning set | مولدةخطيا |
| Diagonal sum of matrices | مجموع قطري لمصفوفات |
| Direct sum | مباشر |
| External direct sum | خارجي |
| Internal direct sum | داخلي |
| Determinant | محدد |
| Entry | مدخل (عنصر) |
| Quaternion | مرباع |
| Ordered | مرتب |
| Order | مرتبة |
| Order of cyclic linear transformation | تحويل خطي دوروي |
| Order of cyclic module | حلقية دوروية |

| | |
|---|---|
| Order of a module element | مرتبة عنصر في حلقية |
| Component | مركبة |
| Primary component | أولية |
| Axiom | مسلمة |
| Axiom of choice | الاختيار |
| Minor | مصغر |
| i-Minor | من النوع i |
| Matrix | مصفوفة |
| Submatrix | جزئية |
| Jordan canonical matrix | جوردان القانوية |
| Elementary Jordan λ-matrix | جوردانية ابتدائية من النوع λ |
| Companion matrix | رفيقة |
| Diagonal matrix | قطرية |
| Triangular matrix | مثلثية |
| Primary rational matrix | نسبية أولية |
| Identity matrix | الوحدة (محايدة) |
| Identification | مطابقة |
| Inverse | معاكس |
| Coefficient | معامل |
| Inverse of | معكوس |
| Algebraically closed | مغلق جبريا |
| Approach | مقاربة |
| Comparison | مقارنة |
| Representative | ممثل |
| Finite | منته |
| Finitely-generated | منتهي التوليد |

| | |
|---|---|
| Generators | مولدات |
| Free generators | حرة |
| Finitely-generated | مولد نهائيا |

**ن**

| | |
|---|---|
| Rational | نسبي |
| Theory | نظرية |
| Algebraic number theory | الأعداد الجبرية |
| Kernel | نواة |

**و**

| | |
|---|---|
| Uniqueness | وحدانية |
| Uniqueness of factorization | التحليل |
| Uniqueness of decomposition | التفريق |
| Monic | واحدي |
| Unique | وحيد |

**ي**

| | |
|---|---|
| Divides | يقسم |
| Represents zero | يمثل الصفر |
| Vanish identically | ينعدم (يتلاشى) تطابقيا |
| Generates freely | يولد بحرية |

## ثانيا: إنجليزي – عربي

### A

| | |
|---|---|
| Abel, N.H. | آبل |
| Abelian group | زمرة إبدالية |
| Abusing notation | إساءة استعمال الترميز |
| Addition | جمع |
| Additive (sub) group | زمرة (جزئية) جمعية |
| Algebraically closed field | حقل مغلق جبريا |
| Algebraic geometry | الهندسة الجبرية |
| number theory | نظرية الأعداد الجبرية |
| Algebra over a field | جبرية على حقل |
| Algorithm | خوارزمية |
| Approach | مقاربة |
| Ascending chain condition | شرط السلسلة التصاعدية |
| Associates | متشاركان |
| Associative law | قانون تجميعي |
| Atomic | ذري |
| Automorphism | تماثل ذاتي |
| Axiom of choice | مسلمة الاختيار |

### B

| | |
|---|---|
| Bad element | عنصر سيء |
| Basis of free module | أساس لحلقية حرة |
| Block | قطاع |



| | |
|---|---|
| Cancellation law | قانون الاختصار |
| Cartesian product | جداء ديكارتي |
| Cayley-Hamilton theorem | مبرهنة كيلي - هاملتون |
| Change of basis | تغيير الأساس |
| Characteristic polynomial | كثيرة الحدود المميزة |
| roots | الجذور المميزة |
| Classification of abelian group | تصنيف الزمر الإبدالية |
| of modules | تصنيف الحلقيات |
| Cofactor | متعامل |
| Column operations | عمليات عمودية |
| Commutative | إبدالي |
| diagram | رسم تخطيطي إبدالي (تبادلي) |
| Companion matrix | مصفوفة رفيقة |
| Component | مركبة |
| Componentwise operations | عمليات على المركبات |
| Composition of maps | تركيب التطبيقات |
| Computing invariants | حساب اللامتغيرات |
| Congruence class modulo n | فصل تطابق قياس n |
| Conjugate quaternions | مرباعان مترافقان |
| Constant polynomial | كثيرة حدود ثابتة |
| Convention for summation | اصطلاح للتجميع |
| Conversion table | جدول التحويل |
| Coordinate projections | الإسقاطات الإحداثية |
| Coset | مجموعة مشاركة |

| | |
|---|---|
| Cyclic group | زمرة دوروية |
| linear transformation | تحويل خطي دوروي |
| (sub) module | حلقية دوروية (جزئية دوروية) |



| | |
|---|---|
| Decomposition theorem | مبرهنة التفريق |
| Degree of a polynomial | درجة كثيرة الحدود |
| Determinant | محدد |
| Diagonal matrix | مصفوفة قطرية |
| sum of matrices | مجموعة قطري لمصفوفات |
| Diagram commutes | الرسم التخطيطي إبدالي |
| Dimension | بُعد |
| Direct sum | مجموع مباشر |
| of linear transformations | لتحويلات خطية |
| of modules | لحلقيات |
| of rings | لحلقات |
| Disjoint union | اتحاد منفصل |
| Divides | يقسم |
| Divisor | قاسم |
| of zero | قاسم للصفر |

**E**

| | |
|---|---|
| Eigenvalue | قيمة ذاتية |
| Eigenvector | متجه ذاتي |

| | |
|---|---|
| Elementary column operations | العمليات العمودية الابتدائية |
| divisor | قاسم ابتدائي |
| Jordan λ-matrix | مصفوفة جوردانية ابتدائية من النوع λ |
| row operations | العمليات الصفية الابتدائية |
| Embedding | طمر (غمر) |
| Endomorphism | تشاكل داخلي |
| of abelian group | تشاكل داخلي للزمرة الإبدالية |
| of module | تشاكل داخلي للحلقية |
| of ring | تشاكل داخلي للحلقة |
| of vector space | تشاكل داخلي للفضاء المتجه |
| ring | حلقة التشاكلات الداخلية |
| Entry | مدخل، عنصر |
| Epimorphism | تشاكل غامر |
| Equivalence relation | علاقة تكافؤ |
| Equivalent matrices | مصفوفات متكافئة |
| Euclidean algorithm | خوارزمية اقليدس |
| division property | خاصة القسمة الإقليدية |
| domain (ED) | حلقة إقليدية |
| function | دالة إقليدية |
| External direct sum | المجموع المباشر الخارجي |

## F

| | |
|---|---|
| Factor | عامل |
| Factorization properties of $\mathbb{Z}$ | خواص التحليل لـ $\mathbb{Z}$ |
| Finite-dimensional | ذو بعد منته، منتهي البعد |

| | |
|---|---|
| Finitely-genereated (FG) | منتهي التوليد، مولد نهائيا |
| abelian group | زمرة إبدالية مولدة نهائيا |
| module | حلقية مولدة نهائيا |
| Free abelian group | زمرة إبدالية حرة |
| generators | مولدات حرة |
| module | حلقية حرة |
| vector space | فضاء متجه حر |
| Fundamental theorem of algebra | المبرهنة الأساسية في الجبر |

## G

| | |
|---|---|
| Gaussian domain | حلقة جاوس |
| integers | أعداد جاوس |
| Gauss's theorem | مبرهنة جاوس |
| Generates freely | يولد بحرية |
| Generators | مولدات |
| and relations | المولدات والعلاقات |
| of abelian group | مولدات للزمرة الإبدالية |
| of ideal | مولدات للمثالي |
| of (sub) module | مولدات للحلقية (للحلقية الجزئية) |
| of (sub) ring | مولدات للحلقة (للحلقة الجزئية) |
| Good element | عنصر جيد |
| Greatest common divisor (gcd) | قاسم مشترك أعظم |
| Group | زمرة |
| representation | تمثيل الزمرة |
| theory | نظرية الزمر |



| | |
|---|---|
| Height of a generating set | ارتفاع مجموعة مولدة |
| Highest common factor (hcf) | عامل مشترك أعلى |
| Homomorphism | تشاكل |
| Group homomorphism | تشاكل زمر |
| Module homomorphism | تشاكل حلقيات |
| Natural homomorphism | تشاكل طبيعي |
| Ring homomorphism | تشاكل حلقات |

## I

| | |
|---|---|
| Ideal | مثالي |
| Identification | مطابقة |
| Identity element | عنصر محايد |
| matrix | مصفوفة الوحدة (مصفوفة محايدة) |
| Image | صورة |
| i-Minor | مصغر من النوع i |
| Indecomposable module | حلقية غير قابلة للتفريق |
| Indeterminate | متغير |
| Infinite order | رتبة غير منتهية |
| Initial | ابتدائي |
| Integers | الأعداد الصحيحة |
| Integral domain | حلقة تامة |
| Internal direct sum | المجموع المباشر الداخلي |
| Invariant factor matrix | مصفوفة العوامل اللامتغيرة |

| | |
|---|---|
| Invariant factors | العوامل اللامتغيرة |
| of matrix | العوامل اللامتغيرة للمصفوفة |
| of module | العوامل اللامتغيرة للحلقية |
| susbspace | فضاء جزئي لا متغير |
| Inverse | معاكس |
| of | معكوس |
| image | صورة عكسية |
| Invertible matrix | مصفوفة قابلة للانعكاس |
| Irreducible | غير قابلة للتحليل |
| Isomorphism | تماثل |
| theorems | مبرهنات التماثل |
| for rings | مبرهنات التماثل للحلقات |
| for modules | مبرهنات التماثل للحلقيات |



| | |
|---|---|
| Jordan canonical form (JCF) | شكل جوردان القانوني |
| canonical matrix | مصفوفة جوردان القانونية |
| matrix | مصفوفة جوردانية |
| $\lambda$-matrix | مصفوفة جوردانية من النوع $\lambda$ |



| | |
|---|---|
| Kernel | نواة |
| Kronecker delta | دلتا كرونكر |



| | |
|---|---|
| Left ideal | مثالي أيسر |
| R-module | حلقية يسرى على R |
| Lemma | مأخوذة |
| Lenght of element | طول العنصر |
| Linearly dependent set | مجموعة مرتبطة خطيا (غير مستقلة خطيا) |
| independent set | مجموعة مستقلة خطيا |
| Linear transformation | تحويل خطي |

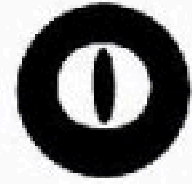


| | |
|---|---|
| Main theorem | المبرهنة الرئيسة |
| Matrix of relations | مصفوفة علاقات |
| ring | حلقة مصفوفات |
| Minimal polynomial | كثيرة حدود أصغرية |
| of linear transformation | كثيرة حدود أصغرية لتحويل خطي |
| of matrix | كثيرة حدود أصغرية لمصفوفة |
| Minor | مصغر |
| Module | حلقية |
| cyclic | حلقية دوروية |
| definition | تعريف الحلقية |
| examples | أمثلة للحلقية |
| homomorphism | تشاكل حلقيات |
| Monic polynomial | كثيرة حدود واحدية |
| Monomorphism | تشاكل متباين |

| | |
|---|---|
| Morphism | اقتران |
| Multiplication | ضرب |
| Multiplicative function | دالة ضربية |
| identity | عنصر محايد ضربي |



| | |
|---|---|
| Natural homomorphism | تشاكل طبيعي |
| Nested | متداخل |
| Neutral element | عنصر محايد |
| Noether, Emmy | نويثر، إمي |
| Noetherian ring | حلقة نويثرية |
| Non-singular matrix | مصفوفة غير شاذة |
| Norm function | دالة معيار |
| n-Tuple | عديد من النوع n |



| | |
|---|---|
| Order | رتبة، مرتبة، ترتيب |
| Ordered basis | أساس مرتب |
| Order ideal | مثالي ترتيب |
| of element | مثالي ترتيب لعنصر |
| of cyclic module | مثالي ترتيب لحلقية دوروية |
| of cyclic linear transformation | مرتبة تحويل خطي دوروي |
| of cyclic module | مرتبة حلقية دوروية |
| of group element | رتبة عنصر في زمرة |
| of module element | مرتبة عنصر في حلقية |

| | |
|---|---|
| Over same ring | على نفس الحلقة |



| | |
|---|---|
| Parallelogram law | قانون متوازي الأضلاع |
| Partial ordering | ترتيب جزئي |
| Periodic element | عنصر دوري |
| Pointwise operations | عمليات نقطية |
| Polynomial function | دالة كثيرة حدود |
| ring | حلقة كثيرات حدود |
| Post-operator | مؤثر بعدي |
| Power set | مجموعة القوة |
| Pre-operator | مؤثر قبلي |
| Presentation | تمثيل |
| Primary component | مركبة أولية |
| cyclic module | حلقية دوروية أولية |
| decomposition | تفريق أولي |
| invariants | لامتغيرات أولية |
| module | حلقية أولية |
| rational matrix | مصفوقة نسبية أولية |
| Prime | أولي |
| Principal ideal | مثالي رئيسي |
| domain (PID) | حلقة تامة رئيسة |
| Product (of sets) | جداء (مجموعات) |
| Projection | إسقاط |
| p-torsion module | حلقية فتل من النوع p |



| | |
|---|---|
| Quaternion | مرباع |
| Quotient module | حلقية القسمة |
| Quotient ring | حلقة القسمة |

## R

| | |
|---|---|
| Rank of module | رتبة الحلقية |
| Rational canonical form | الشكل القانوني النسبي |
| matrix | مصفوفة قانونية نسبية |
| Reduction of matrix | اختزال المصفوفة |
| Redundance of hypotheses | فيض الفروض |
| Relations | علاقات |
| Remainder theorem | مبرهنة الباقي |
| Representative | ممثل |
| Represents zero | يمثل الصفر |
| Residue class modulo n | فصل راسب قياس n |
| ring | حلقية فصول الرواسب |
| Restriction of a function | اقتصار دالة |
| R-homomorphism | تشاكل على R |
| Right R-module | حلقية يمنى على R |
| Ring, additive group of | الزمرة الجمعية لحلقة |
| construction of | إنشاء (بناء) الحلقة |
| definition of | تعريف الحلقة |
| Noetherian | حلقة نويثرية |

| | |
|---|---|
| non-example | لا مثال على الحلقة |
| of linear transformations | حلقة التحويلات الخطية |
| of matrices | حلقة مصفوفات |
| of polynomial functions | حلقة دوال كثيرات الحدود |
| quotient | حلقة القسمة |
| Rings, direct sum of | المجموع المباشر للحلقات |
| examples | أمثلة على الحلقات |
| Rings, special classes of | أنواع خاصة من الحلقات |
| with a multiplicative identity | حلقة بمحايد ضربي |
| R-module | حلقية على R |
| Root | جذر |
| Row operation | عملية صفية |
| Rule of thumb | قاعدة الإبهام |



| | |
|---|---|
| Scalar | سلمي |
| Secondary operation | عملية ثانوية |
| Semigroup | شبه زمرة |
| Sequence of invariant factors | متتالية عوامل لا متغيرة |
| of torsion invariants | متتالية لا متغيرات الفتل |
| Shorthand notation | ترميز مختصر |
| similar matrices | مصفوفات متشابهة |
| Spanning set | مجموعة مولدة |
| Splitting property | خاصة الانشطار |
| Square bracket notation | ترميز القوس المربع |

| | |
|---|---|
| Subgroup | زمرة جزئية |
| Submatrix | مصفوفة جزئية |
| Submodule | حلقية جزئية |
| Subring | حلقة جزئية |
| Summand | مجمع |

## T

| | |
|---|---|
| Torsion | فتل |
| element | عنصر فتل |
| free | عديم الفتل |
| element | عنصر عديم الفتل |
| module | حلقية عديمة الفتل |
| rank | الرتبة الحرة من الفتل |
| ivariants | لامتغيرات الفتل |
| module | حلقية فتل |
| Triangular matrices | مصفوفات مثلثية |
| Tuple | عديد |

## U

| | |
|---|---|
| Unary operation | عملية أحادية |
| Unique factorization domain (UFD) | حلقة تحليل وحيد |
| Uniqueness | وحدانية |
| of decomposition | وحدانية التفريق |
| of factorization | وحدانية التحليل |

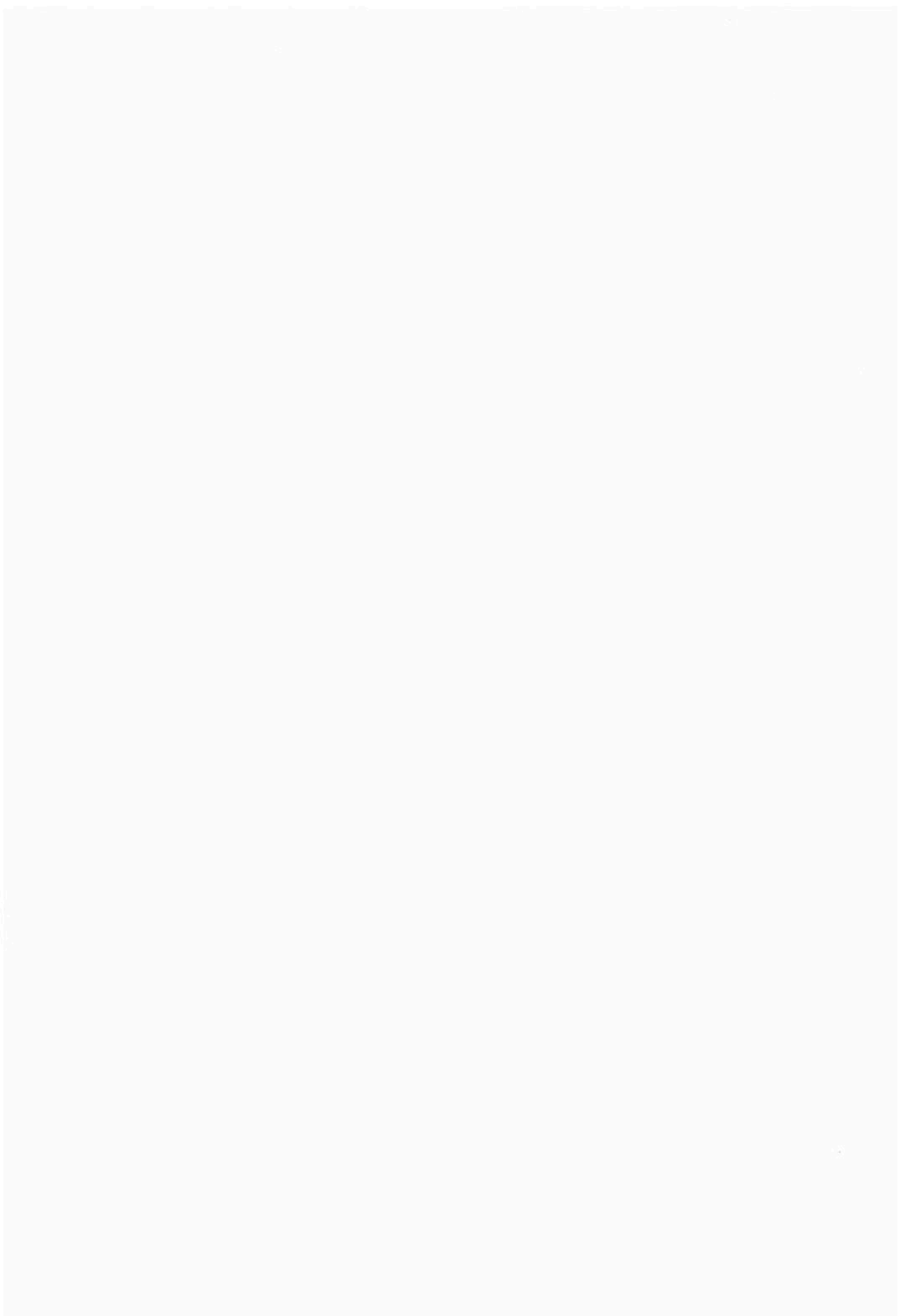
| | |
|---|---|
| Unit | عنصر وحدة |
| Universal algebra | جبرية شاملة |
| property | خاصة شاملة |
| for direct sums | خاصة شاملة للمجاميع المباشرة |
| for polynomial rings | خاصة شاملة لحلقات كثيرات الحدود |
| Unordered basis | أساس غير مرتب |
| Up to | تحت سقف |



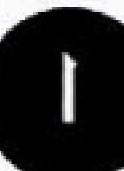
| | |
|---|---|
| Vanish identically | ينعدم (يتلاشى) تطابقيا |
| Via α, module | حلقية بواسطة α |

Z

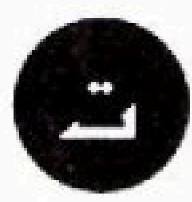
| | |
|---|---|
| Zero | صفر |
| divisor | قاسم للصفر |



# كشاف الموضوعات







ج



ح



خ



د



ر

و



ي

**الدكتور أحمد بن حميد أحمد شراري**

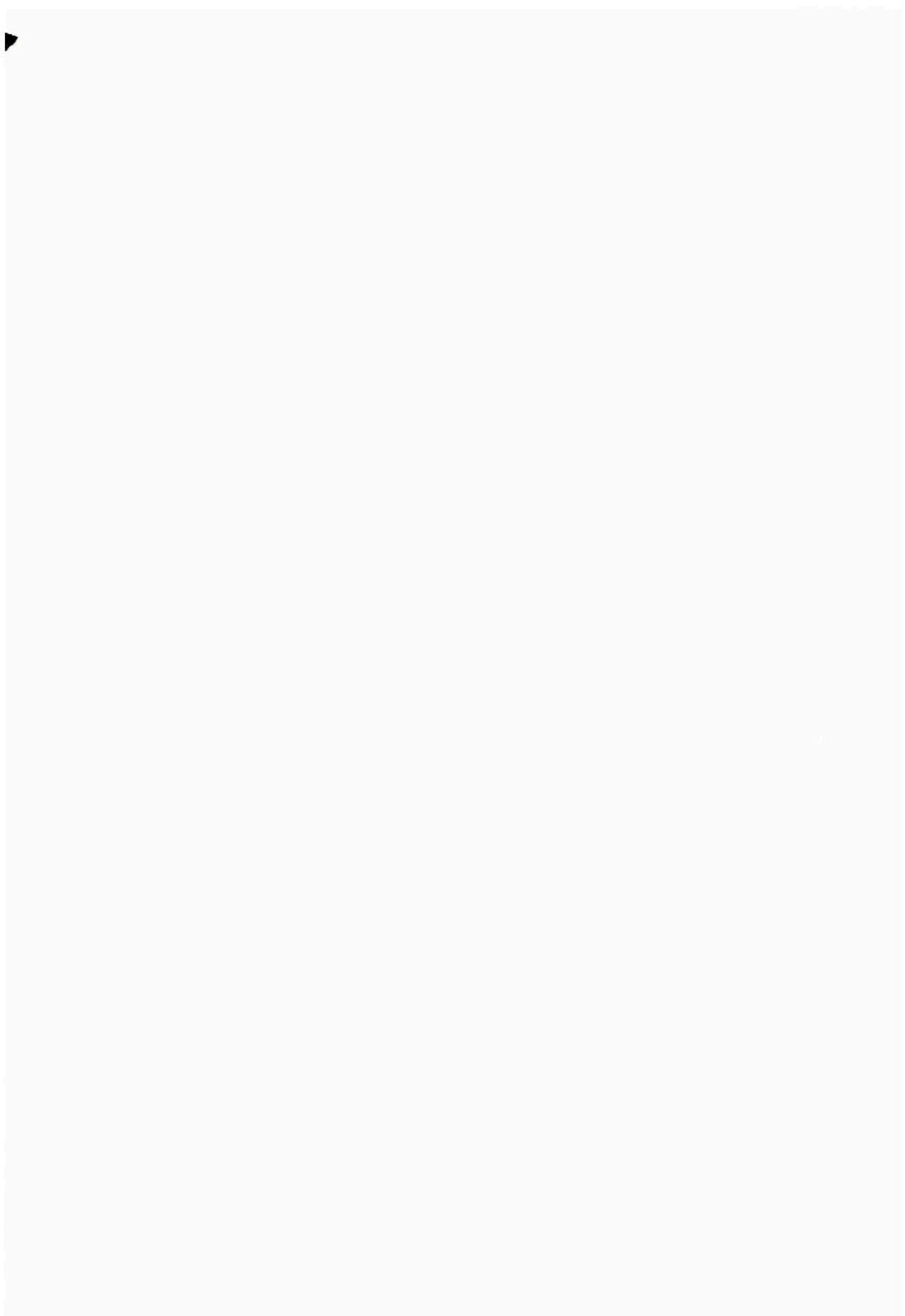
أستاذ مشارك في قسم الرياضيات بكلية العلوم ، جامعة الملك سعود . حصل على درجة الدكتوراة في علم الرياضيات من جامعة الشرق الأوسط للتقنية في أنقرة بتركيا عام ١٤٠٢هـ (١٩٨٢م) حيث عمل محاضرا . عمل في عدة لجان في القسم والكلية .

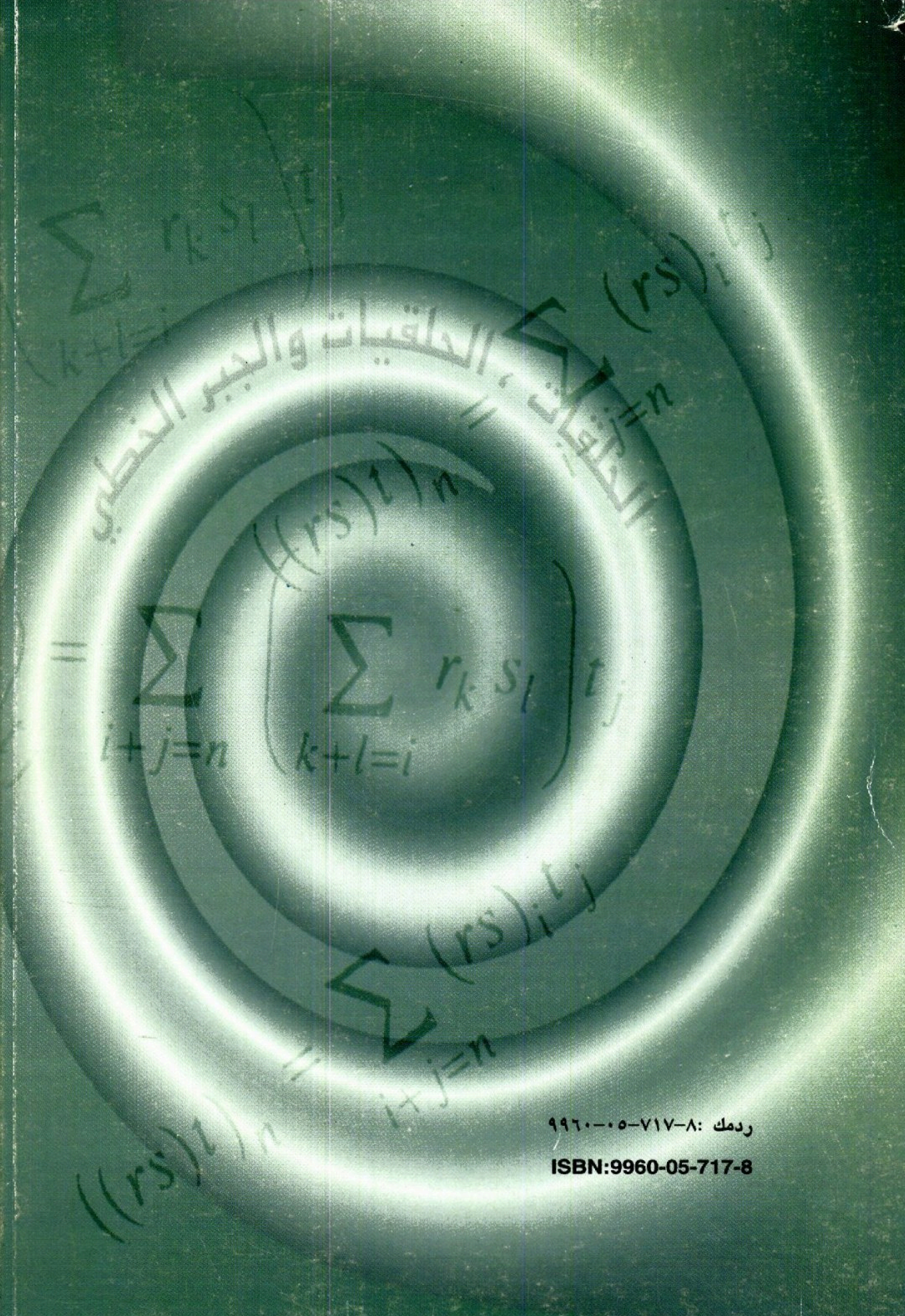
قام بنشر عدة أبحاث في نظرية المجموعات المرتبة وفي نظرية الرسومات كما شارك في تأليف كتاب عن الرياضيات المتقطعة وترجمة بعض المراجع العلمية في علم الرياضيات .

**الدكتور يوسف بن عبد الله تركي الخميس**

أستاذ في قسم الرياضيات بكلية العلوم، جامعة الملك سعود . حصل على درجة الدكتوراة في علم الرياضيات من جامعة ردنج ببريطانيا عام ١٣٩٧هـ (١٩٧٧م) . عمل رئيسا لقسم الرياضيات ثم وكيلا لكلية الدراسات العليا وأعيرت خدماته بعد ذلك لوزارة المالية والاقتصاد الوطني حيث تولى مسئولية نائب مدير عام مصلحة الإحصاءات العامة . كما عمل مستشارا لمصلحة الإحصاءات العامه أثناء التعداد العام للسكان والمساكن ، وعمل مستشارا لمكتب التربية العربي لدول الخليج .

قام بنشر عدة أبحاث في نظرية الحلقات وفي نظرية المجموعات المشوشة . شارك في تأليف وترجمة عدة كتب ومراجع لمراحل دراسية مختلفة . اختير عضو هيئة تحرير ومحكما لعدة مجلات علميه متخصصة ، كما عمل مديرا لتحرير مجلة الخليج العربي للبحوث العلمية لمدة ثلاث سنوات .





ردمك :٨-٧١٧-٠٥-٩٩٦٠
ISBN:9960-05-717-8